

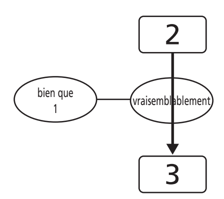
Corrigés des exercices



Exercices sur la structure des raisonnements

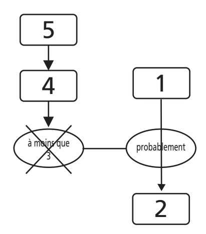
Dégagez la structure des raisonnements suivants en présentant les rapports entre leurs prémisses et leur conclusion sous la forme d'un diagramme.

a)



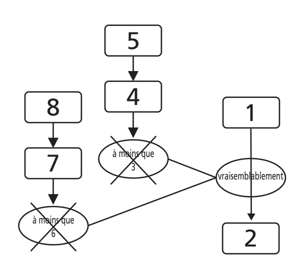
L'objection envisagée dans la première phrase est désamorcée par le fait que la prémisse (3) prévaut sur elle.

b)



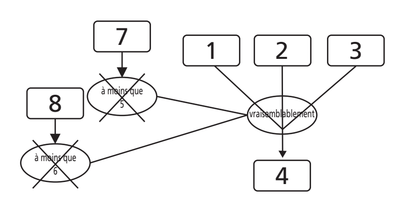
Dans ce cas, la réserve évoquée contre l'inférence principale est dirimante (à moins que), mais elle est désamorcée par une chaîne inférentielle annexe, qui établit que les conditions envisagées dans cette réserve n'ont pas lieu.

c)



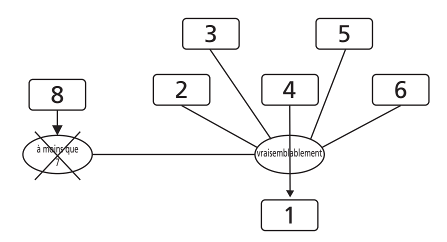
Ici, l'inférence initiale fait l'objet de deux objections (soulevées par un opposant), qui sont, l'une et l'autre, combattues par des chaînes inférentielles annexes montrant qu'elles ne doivent pas être retenues.

d)



Dans le cas présent, trois prémisses convergent initialement vers une conclusion, mais cette inférence est mise en risque par deux réserves, qui sont cependant, l'une et l'autre, désamorcées par des arguments annexes.

e)



Dans ce cas, ce sont cinq arguments qui convergent en faveur d'une même conclusion. L'inférence est toutefois mise en risque par un contre-argument dirimant (l'accusé était ailleurs au moment du cambriolage), dont un argument annexe montre toutefois, non pas tant qu'il est faux, mais qu'il ne peut pas vraiment bloquer l'inférence pour la raison qu'il manque lui-même de fondement.



Exercices sur la logique des propositions

1. Réponses correctes : a, b, c, d, e, i. Les affirmations f, g et h sont fausses.

2. Les expressions a, j, l ne sont pas des propositions. Les expressions b, d, f, h sont des propositions simples, les expressions e, g, i des propositions complexes. Les expressions c, k sont des raisonnements.

3.
a) Le travail est une condition nécessaire pour la réussite.
b) Le travail est une condition suffisante pour la réussite.
c) Le travail n'est pas une condition nécessaire pour la réussite.
d) Le travail n'est pas une condition suffisante pour la réussite.
e) Être aimable est une condition nécessaire pour être aimé.
f) Être aimé est une condition nécessaire pour être aimable.
g) Être aimable n'est pas une condition suffisante pour être aimé.
h) Être aimable n'est pas une condition nécessaire pour être aimé. Ou : Être aimé n'est pas une condition suffisante pour être aimable.
i) Qu'on exerce sur nous une contrainte est une condition nécessaire pour que sortions d'ici.
j) Avoir l'esprit bien préparé est une condition nécessaire pour avoir de la chance.

4.

p	**q**	**p ? q**	**$p \vee q$**	**p ? q**	**p ? q**	**$p \Rightarrow q$**	**p ? q**	**$p \Leftrightarrow q$**	**$p \wedge q$**
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F
		vrai quels que soient p et q	p ou q	p si q (si q alors p)	p quel que soit q	si p alors q	q quel que soit p	p si et seulement si q	p et q

p	**q**	**$p \mid q$**	**p W q**	**p ? q**	**p ? q**	**p ? q**	**p ? q**	**$p \downarrow q$**	**p ? q**
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F
		pas à la fois p et q	soit p soit q	non q quel que soit p	p mais pas q	non p quel que soit q	non p mais q	ni p ni q	faux quels que soient p et q

5. a) faux ; b) faux ; c) vrai ; d) vrai

6. a) vrai ; b) vrai ; c) vrai ; d) faux ; e) vrai

7. Les cinq propositions complexes peuvent être formalisées de la manière suivante :

a) Si l'âme est d'essence divine, elle est éternelle. $d \Rightarrow e$

b) L'âme est éternelle et d'essence divine. $e \wedge d$

c) L'âme est éternelle, qu'elle soit ou non d'essence divine. e

d) Qu'elle soit ou non d'essence divine, l'âme est ou n'est pas éternelle. $e \vee \neg e$

e) Qu'elle soit ou non d'essence divine, l'âme est et n'est pas éternelle. $e \wedge \neg e$

Or, d'après les tables de vérité de ces formules (cf. corrigé de l'exercice 34), d) est vrai dans tous les cas où a) est vrai, qui est lui-même vrai dans tous les cas où c) est vrai, qui est lui-même vrai dans tous les cas où b) est vrai, qui est lui-même vrai dans tous les cas où e) est vrai. L'ordre du plus probable au moins probable est donc : d) ; a) ; c) ; b) ; e).

8. Les quatre propositions complexes peuvent être formalisées de la manière suivante :

a) L'informatique facilite la comptabilité ou la gestion $c \vee g$

b) L'informatique facilite la comptabilité mais aussi la gestion $c \wedge g$

c) L'informatique facilite la comptabilité et facilite ou non la gestion $c \wedge (g \vee \neg g)$

d) L'informatique facilite la comptabilité si et seulement si elle la complique $c \Leftrightarrow \neg c$

Or, d'après les tables de vérité de ces formules (cf. corrigé de l'exercice 35), a) est vrai dans tous les cas où c) est vrai, qui est lui-même vrai dans tous les cas où b) est vrai, qui est lui-même vrai dans tous les cas où d) est vrai. L'ordre du plus probable au moins probable est donc : a) ; c) ; b) ; d).

9. Sont mal formées les expressions : c) ; d) ; e) ; g) ; k). En outre, l'expression h) est ambiguë ; il convient d'introduire des parenthèses pour préciser la hiérarchie des connecteurs.

10. Avec *r* pour « On réussit » et *t* pour « On travaille » :

a) $r \Rightarrow t$ ou $\neg(r \wedge \neg t)$

b) $t \Rightarrow r$

c) $\neg(r \Rightarrow t)$

d) $\neg(t \Rightarrow r)$

Avec *a* pour « On est aimé » et *b* pour « On est aimable » :

e) $a \Rightarrow b$

f) $\neg a \Rightarrow \neg b$ ou $\neg(b \wedge \neg a)$

g) $\neg(b \Rightarrow a)$

h) $\neg(a \Rightarrow b)$

i) avec *s* pour « Nous sortons d'ici » et *c* pour « On exerce sur nous une contrainte » : $s \Rightarrow c$ ou $\neg c \Rightarrow \neg s$ ou encore $\neg(s \wedge \neg c)$

j) avec *c* pour « On a de la chance » et *p* pour « On a l'esprit préparé » : $c \Rightarrow p$ ou $\neg p \Rightarrow \neg c$

Lorsque plusieurs formalisations sont proposées, elles sont logiquement équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas des interprétations différentes de l'expression française, mais seulement des formulations différentes d'un seul et même sens. Parfois, d'autres formalisations logiquement équivalentes sont encore possibles. Pour savoir si la formalisation que vous proposez est logiquement équivalente à celle du corrigé, il faut procéder à une vérification par les tables de vérité.

11. a) Si Nietzsche a raison, Dieu est mort

b) Si Dieu est mort, Nietzsche a raison

c) Si Nietzsche a tort, Dieu n'est pas mort (ou est vivant)

d) Si Dieu n'est pas mort (ou est vivant), Nietzsche a tort

Les propositions a) et d) sont logiquement équivalentes ; de même, les propositions b) et c).

12. Avec des notations évidentes pour les propositions atomiques :

a) $b \land m$

b) $\neg(b \land m)$

c) $b \land \neg m$

d) $\neg b \land \neg m$

e) $b \land m \land l \land s$

f) $(m \land c)\ W\ r$

g) $r \Leftrightarrow \neg x$ (la « condition » est ici nécessaire et suffisante)

h) $r \Rightarrow x$ ou $\neg x \Rightarrow \neg r$ (au sens strict, « à moins que » traduit un conditionnel simple : si Monsieur X. n'est pas à la réception, je ne m'y rendrai pas. Dans certains contextes, il peut cependant être compris comme un biconditionnel : si Monsieur X. n'est pas à la réception, je ne m'y rendrai pas, mais je promets de m'y rendre s'il y est).

i) $\neg i \land p$

j) $f \Rightarrow \neg r$

k) $\neg(f \Rightarrow r)$

l) $s \Rightarrow (p \lor m)$

m) $\neg(d \lor f) \land \neg(h \lor v)$ ou encore $\neg d \land \neg f \land \neg h \land \neg v$

n) $e \land \neg s$

o) $r \land \neg s$

p) $i \Rightarrow e$ ou $\neg e \Rightarrow \neg i$

q) $i \Leftrightarrow e$

r) $(e \lor \neg e) \Rightarrow i$ ou plus simplement : i

s) $f \Rightarrow (r \land a)$ ou encore $\neg[f \land \neg(r \land a)]$

t) $p \Rightarrow (r \lor m)$ ou encore $p \Rightarrow (\neg m \Rightarrow r)$

13. a) $\neg p \land q$

b) $\neg p \land \neg q$

c) $p \Leftrightarrow \neg q$

d) La phrase française est ambiguë et peut recevoir une des deux formalisations suivantes : $q \Rightarrow (\neg r \land t)$ ou alors $\neg r \land (q \Rightarrow t)$

e) $(p \land r) \Rightarrow s$

f) $r \Rightarrow p$ ou encore $\neg p \Rightarrow \neg r$

g) $(p \Rightarrow r) \land (q \Rightarrow \neg r)$

h) $(r \lor \neg r) \Rightarrow s$ ou encore s

i) $\neg(t \land \neg q)$ ou encore $t \Rightarrow q$

j) $\neg(p \Rightarrow s)$

k) $q \Rightarrow (s \Rightarrow t)$

l) $t \Rightarrow \neg s$

m) $\neg r \Rightarrow (\neg s\ W\ t)$

n) $r \Rightarrow (s \land \neg t)$

o) Soit le débiteur est riche soit il est insolvable

p) Le créancier rentre dans ses frais si et seulement si le débiteur n'est pas insolvable

q) Si le créancier ne fait pas faillite, c'est qu'il rentre dans ses frais

r) Le créancier rentre dans ses frais mais ne rembourse pas ses propres dettes

s) Si le débiteur est riche, le créancier rentre dans ses frais, mais il n'est pas vrai que si le débiteur est insolvable, le créancier fait forcément faillite.

t) Que le créancier rembourse ou non les dettes qu'il a lui-même contractées, il fait faillite

u) Soit le débiteur est riche et le créancier rentre dans ses frais soit le créancier fait faillite (mais pas les deux)

14. a) $\neg(p \vee q)$: Il est faux que la garde de l'enfant soit retirée aux parents ou même que l'on désigne pour l'enfant un tuteur extérieur à la famille.

$\neg p \vee q$: La garde de l'enfant n'est pas retirée aux parents ou alors on désigne pour l'enfant un tuteur extérieur à la famille

Les deux formules ont la même valeur de vérité quand *p* est vrai et *q* faux et quand *p* et *q* sont tous deux faux :

p	**q**	**p ∨ q**	**¬(p ∨ q)**
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	**q**	**¬p**	**¬p ∨ q**
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

b) Les quatre formules sont vraies quand *p* et *q* sont faux, c'est à dire quand la garde n'est pas retirée aux parents et qu'un tuteur n'est pas désigné :

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**¬p ∨ q**	**p ∨ ¬q**	**¬p ∨ ¬q**	**¬(p ∨ q)**
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V

15. $(e \wedge d) \Leftrightarrow [e \vee (c \Rightarrow f)]$

	e	**d**	**c**	**f**	**e ∧ d**	**c ⇒ f**	**e ∨ (c ⇒ f)**	**(e ∧ d) ⇔ [e ∨ (c ⇒ f)]**
a)	V	V	F	F	V	V	V	V
b)	F	V	V	F	F	F	F	V

16. a) p ⇒ q : vrai car *p* faux et *q* faux

b) q ⇒ p : vrai car *p* faux et *q* faux

c) p ∨ q : faux car *p* faux et *q* faux

d) p ⇔ q : vrai car *p* vrai et *q* vrai

e) (p ∨ q) ∧ r : vrai car *p* faux et *q* vrai (donc *p*∨*q* vrai) et *r* vrai

f) (p W q) ⇒ (r ∨ s) : faux car *p* faux, *q* vrai (donc *pWq* vrai) et *r* faux, *s* faux (donc *r*∨*s* faux)

g) (¬p ∧ ¬q) ∨ r ou (p ∨ q) ⇒ r : vrai car *p* faux et *q* faux (donc ¬*p*∧¬*q* vrai) et *r* faux

h) q ⇒ p : vrai car *p* vrai et *q* faux

i) p ⇒ q : faux car *p* vrai et *q* faux

17.

	Mercure	Venus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
a) g ∧ c	F	F	F	F	V	V	F	F
b) t ∧ ¬s	V	V	F	F	F	F	F	F
c) g ⇒ u	F	F	F	V	V	V	V	V
d) g W t	V	V	V	V	V	V	V	V
e) ¬s W ¬d	F	F	V	V	F	F	F	F
f) s ⇔ g	V	V	F	F	V	V	V	V
g) (c ∧ d) ⇒ g	V	V	V	V	V	V	V	V
h) g ⇒ (c ∧ d)	V	V	V	V	V	V	F	F
i)(t∨c)⇔(c∧¬d)	F	F	F	F	F	F	V	V

18. A = ¬a ⇔ (bWc)

B = b ⇒ (a∨c)

C = ¬(a∧b∧c)

a	b	c	¬a	bWc	A	a∨c	B	a∧b	a∧b∧c	C
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	F
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	F	V	F	F	V

a) si les trois thèses philosophiques sont vraies (ligne 1), Carnap tire une conclusion erronée

b) si les trois thèses philosophiques sont fausses (ligne 8), Aristote tire une conclusion erronée

c) si la thèse d'Aristote est fausse (lignes 5-6-7-8), la conclusion de Carnap est toujours vraie

d) si les trois philosophes tirent une conclusion correcte (lignes 4-7), seule la thèse de Bolzano est forcément fausse

e) Bolzano (lignes 3-4-7-8) et Carnap (lignes 2-4-6-8) tirent forcément une conclusion correcte s'ils défendent une thèse fausse

f) personne ; il n'y a aucune situation dans laquelle deux philosophes tirent une conclusion erronée et le troisième une conclusion correcte

g) si on suppose que les meilleurs philosophes sont aussi les meilleurs logiciens (ligne 5), Bolzano et Carnap sont bons philosophes et bons logiciens

19. En niant une tautologie, on obtient nécessairement une contradiction, puisque tous les cas qui rendaient vraie la tautologie rendent maintenant fausse sa négation.

Si on nie une proposition complexe qui n'est ni tautologique ni contradictoire, on obtient une proposition qui est fausse dans les cas qui rendaient vraie la proposition de départ et vraie dans les cas qui rendaient fausse la proposition de départ, donc une proposition qui n'est elle-même ni tautologique ni contradictoire.

20. a) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p⇒q**	**(p⇒q) ∧¬p**	**[(p⇒q) ∧ ¬p] ⇒ ¬q**
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Formule ni valide ni contradictoire

b) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

p	**q**	**p⇔q**	**(p⇔q) ∧ q**	**[(p⇔q) ∧ q] ⇒ p**
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Formule valide

c) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

p	**q**	**¬p**	**p⇒q**	**¬p⇒q**	**(p⇒q) ∧(¬p⇒q)**	**[(p⇒q) ∧ (¬p⇒q)] ⇒ q**
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V

Formule valide

d) ¬(p∨q) ⇔ (¬p∨¬q)

p	q	p∨q	¬(p∨q)	¬p	¬q	¬p∨¬q	¬(p∨q) ⇔ (¬p∨¬q)
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V

Formule ni valide ni contradictoire

e) [p ∨ (q ∧ r)] ⇔ [(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)]

p	q	r	q∧r	p∨(q∧r)	p∧q	p∧r	(p∧q) ∨ (p∧r)	Formule
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Formule ni valide ni contradictoire

f) [(p ∧ q) ⇒ r] ⇔ [(p ⇒ r) ∧ (q ⇒ r)]

p	q	r	p∧q	(p∧q)⇒r	p⇒r	q⇒r	(p⇒r)∧(q⇒r)	Formule
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Formule ni valide ni contradictoire

g) {[(¬p ∧ ¬q) ⇒ r] ∧ [(p ∨ q) ⇒ s]} ⇒ (r ∨ s)

p	q	r	s	¬p	¬q	¬p∧¬q	(¬p∧¬q)⇒r	p∨q	(p∨q) ⇒s	[(¬p∧¬q)⇒r] ∧ [(p∨q)⇒s]	r∨s	Formule
V	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	F	V

Formule valide

On vérifie de la même manière que :

h) (p ⇒ q) ⇔ (¬p ∨ q) est valide

i) (p ⇒ q) ⇒ q n’est ni valide ni contradictoire

j) (p ∧ q) ⇒ (p ∨ q) est valide

k) (p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬q) n’est ni valide ni contradictoire

l) (p ⇒ q) ⇒ (¬p ⇒ ¬q) n’est ni valide ni contradictoire

m) [(p ⇒ q) ⇒ p] ⇒ p est valide

n) (¬p ∨ q) ∧ (p ∧ ¬q) est contradictoire

o) (p ∧ q) ⇒ (q ∨ r) est valide

p) (p ∧ ¬p) ∨ (q ∧ ¬q) est contradictoire

q) (p ⇒ q) ⇒ [(q ⇒ m) ⇒ (p ⇒ m)] est valide

r) p ⇒ (q ⇒ p) est valide

s) ¬p ⇒ (p ⇒ q) est valide

t) (p ⇔ q) ∨ (p ⇔ ¬q) est valide

u) (p ⇔ q) ∨ (q ⇔ r) ∨ (p ⇔ r) est valide

v) (p ⇒ q) ∨ (q ⇒ p) est valide

21. a) $\neg(p \wedge r) \Rightarrow \neg r$

p	r	p∧r	¬(p∧r)	¬r	[¬(p∧r)] ⇒ ¬r
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V

Raisonnement non valide

b) $\{[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge \neg(q \wedge r)\} \Rightarrow \neg p$

p	q	r	q∨r	p⇒(q∨r)	q∧r	¬(q∧r)	[p⇒(q∨r)]∧¬(q∧r)	¬p	Formule
V	V	V	V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	V	V

Raisonnement non valide

c) $\{[(p \wedge r) \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow (p \wedge q)]\} \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

p	q	r	p∧r	(p∧r)⇒q	p∧q	q⇒(p∧q)	[(p∧r)⇒q] ∧ [q⇒(p∧q)]	p⇔q	Formule
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	V	V

Raisonnement non valide

d) $[(q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (\neg q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee s)$

p	q	r	s	q⇒p	r⇒s	(q⇒p)∧(r⇒s)	¬q	¬q∧r	(q⇒p)∧(r⇒ s) ∧(¬q ∧ r)	p∨s	Formule
V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	V	F	V	F	F	F	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V

Raisonnement valide

22. a) $\{[(\neg s \vee \neg r) \Rightarrow d] \wedge r \wedge s\} \Rightarrow \neg d$: Raisonnement non valide

b) $[(m \vee d) \Rightarrow i] \Rightarrow (m \Rightarrow i)$: Raisonnement valide

c) $\{[(s \wedge \neg d) \Rightarrow e] \wedge \neg e\} \Rightarrow (\neg s \vee d)$: Raisonnement valide

d) $[(e \wedge \neg m) \Rightarrow a] \Rightarrow [\neg a \Rightarrow (\neg e \vee m)]$: Raisonnement valide

e) $[(\neg h \Rightarrow \neg i) \wedge (h \vee \neg i)] \Rightarrow (i \Leftrightarrow h)$: Raisonnement non valide

f) $\{(w \vee q) \wedge [(w \vee r) \Rightarrow q] \wedge [(q \vee r) \Rightarrow w]\} \Rightarrow (w \wedge q)$: Raisonnement valide

g) $\{[p \Rightarrow (l \vee s)] \wedge \neg(l \wedge g) \wedge \neg(g \wedge s \wedge \neg c) \wedge (c \Rightarrow \neg m) \wedge (m \wedge g)\} \Rightarrow \neg p$: Raisonnement valide

23. a) L'attentat de Madrid a été perpétré par Al-Qaida ou par l'ETA.

Or, l'attentat de Madrid a été perpétré par l'ETA si et seulement s'il a été perpétré par Al-Qaida mais qu'il y a des connexions entre Al-Qaida et l'ETA.

Donc l'ETA a perpétré l'attentat de Madrid ou n'entretient pas de relations avec Al-Qaida.

Raisonnement valide.

b) L'attentat de Madrid a été perpétré par Al-Qaida ou par l'ETA.

Or, si Al-Qaida et l'ETA ont tous deux perpétré l'attentat de Madrid, c'est qu'il y a des connexions entre eux.

Donc il y a des connexions entre Al-Qaida et l'ETA.

Raisonnement non valide.

24. En passant de la quatrième à la cinquième ligne du tableau, je conclus que ¬p, ¬q à partir de ¬(p∧q) alors que j'aurais dû ramifier et envisager d'une part le cas où ¬p et d'autre part le cas où ¬q.

25. Dès le passage de la première à la deuxième ligne du tableau, je conclus que ¬r, (p∨¬ q) à partir de r⇒(p∨¬q) alors que j'aurais dû ramifier et envisager d'une part le cas où ¬r et d'autre part le cas où (p∨¬ q).

26. Démontrer qu'une formule n'est ni valide ni contradictoire, c'est démontrer qu'on peut la rendre fausse et qu'on peut aussi la rendre vraie. Dans la pratique, cela suppose donc de construire deux tableaux sémantiques, l'un pour la négation de la formule (s'il se ferme, la formule est valide), l'autre pour la formule (s'il se ferme, la formule est contradictoire). Bien sûr, si le premier tableau se ferme, il est inutile de construire le second : une formule valide est forcément non contradictoire.

a)

¬{[(p ⇒ q) ∧¬p] ⇒ ¬q}
↓
(p ⇒ q) ∧¬p, ¬¬q
↓
(p ⇒ q) ∧¬p, q
↓
(p ⇒ q), ¬p, q
↙ ↘
¬p, ¬p, q | q, ¬p, q
O | O

Formule non valide

[(p ⇒ q) ∧¬p] ⇒ ¬q
↙ ↘
¬[(p ⇒ q) ∧¬p] | ¬q
| O
↙ ↘
¬(p ⇒ q) | ¬¬p
↓ | ↓
p, ¬q | p
O | O

Formule non contradictoire

b)

¬{[(p ⇔ q) ∧ q] ⇒ p}
↓
(p ⇔ q) ∧ q, ¬p
↓
p ⇔ q, q, ¬p
↙ ↘
p, q, q, ¬p | ¬p, ¬q, q, ¬p
X | X

Formule valide

c)

¬{[(p ⇒ q) ∧(¬p ⇒ q)] ⇒ q}

↓

(p ⇒ q) ∧(¬p ⇒ q), ¬q

↓

p ⇒ q, ¬p ⇒ q, ¬q

↙ ↘

¬p, ¬p ⇒ q, ¬q   q, ¬p ⇒ q, ¬q

X

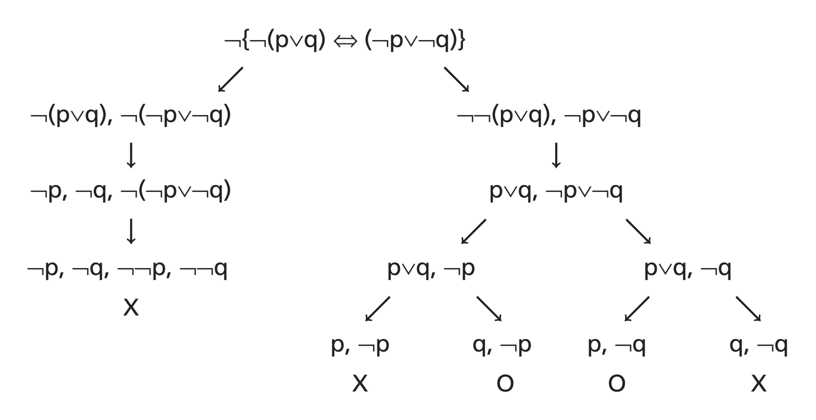
↙ ↘

¬p, ¬¬p, ¬q   ¬p, q, ¬q

X   X

Formule valide

d)



Formule non valide

¬(p∨q) ⇔ (¬p∨¬q)

↙ ↘

¬(p∨q), ¬p∨¬q   ¬¬(p∨q), ¬(¬p∨¬q)

↓   ↓

¬p, ¬q, ¬p∨¬q   p∨q, ¬(¬p∨¬q)

↙ ↘   ↓

¬p, ¬q, ¬p   ¬p, ¬q, ¬q   p∨q, ¬¬p, ¬¬q

O   O   ↓

p∨q, p, q

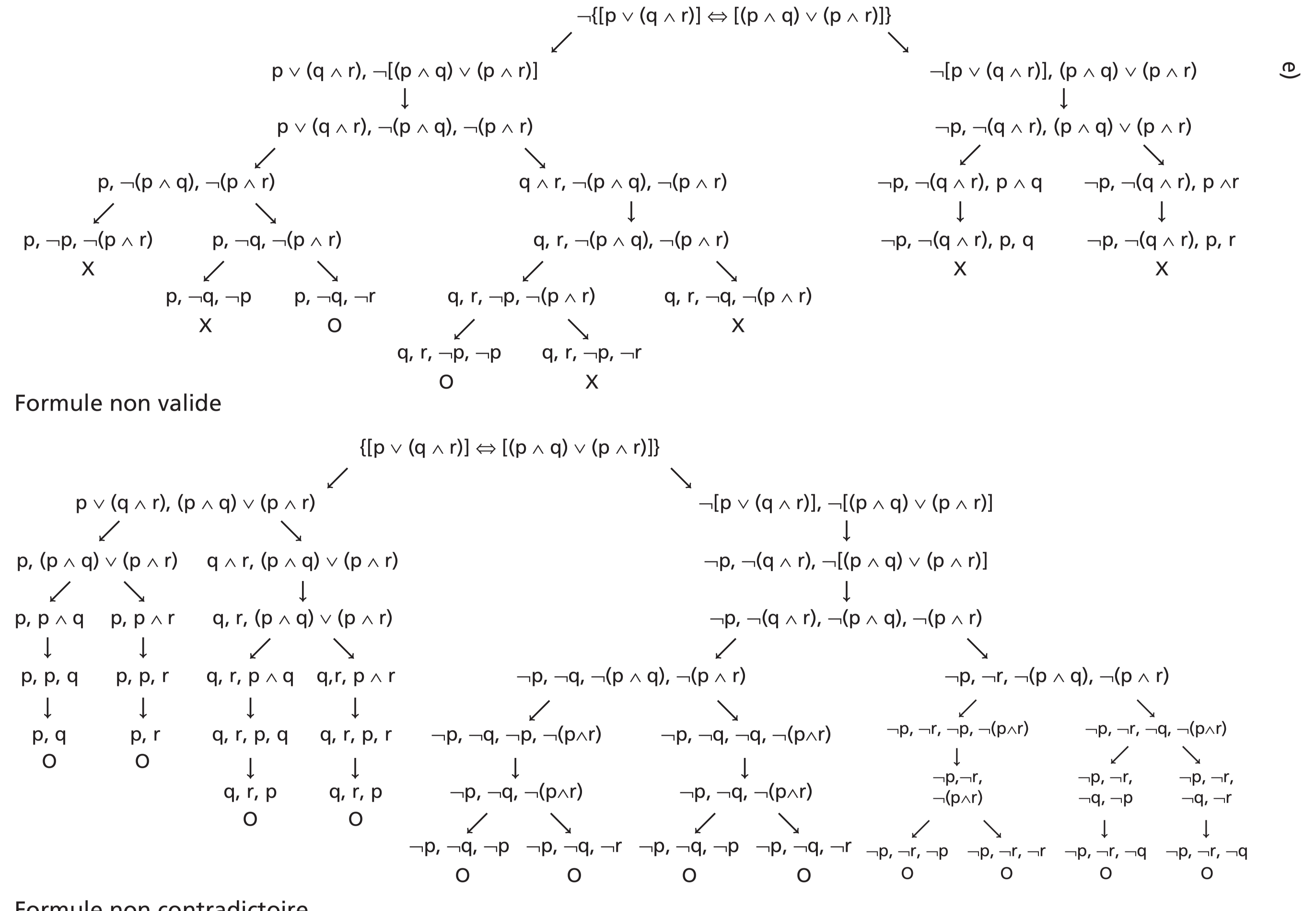
↙ ↘

p, p, q   p, p, q

O   O

Formule non contradictoire

e)



¬{[p ∨ (q ∧ r)] ⇔ [(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)]}
p ∨ (q ∧ r), ¬[(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)]
¬[p ∨ (q ∧ r)], (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
p ∨ (q ∧ r), ¬(p ∧ q), ¬(p ∧ r)
¬p, ¬(q ∧ r), (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
p, ¬(p ∧ q), ¬(p ∧ r)
q ∧ r, ¬(p ∧ q), ¬(p ∧ r)
¬p, ¬(q ∧ r), p ∧ q
¬p, ¬(q ∧ r), p ∧r
p, ¬p, ¬(p ∧ r)
X
p, ¬q, ¬(p ∧ r)
q, r, ¬(p ∧ q), ¬(p ∧ r)
¬p, ¬(q ∧ r), p, q
X
¬p, ¬(q ∧ r), p, r
X
p, ¬q, ¬p
X
p, ¬q, ¬r
O
q, r, ¬p, ¬(p ∧ r)
q, r, ¬q, ¬(p ∧ r)
X
q, r, ¬p, ¬p
O
q, r, ¬p, ¬r
X
Formule non valide
{[p ∨ (q ∧ r)] ⇔ [(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)]}
p ∨ (q ∧ r), (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
¬[p ∨ (q ∧ r)], ¬[(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)]
p, (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
q ∧ r, (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
¬p, ¬(q ∧ r), ¬[(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)]
p, p ∧ q
p, p ∧ r
q, r, (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
¬p, ¬(q ∧ r), ¬(p ∧ q), ¬(p ∧ r)
p, p, q
p, p, r
q, r, p ∧ q
q,r, p ∧ r
¬p, ¬q, ¬(p ∧ q), ¬(p ∧ r)
¬p, ¬r, ¬(p ∧ q), ¬(p ∧ r)
p, q
O
p, r
O
q, r, p, q
q, r, p, r
¬p, ¬q, ¬p, ¬(p∧r)
¬p, ¬q, ¬q, ¬(p∧r)
¬p, ¬r, ¬p, ¬(p∧r)
¬p, ¬r, ¬q, ¬(p∧r)
¬p,¬r,
¬(p∧r)
¬p, ¬r,
¬q, ¬p
¬p, ¬r,
¬q, ¬r
q, r, p
O
q, r, p
O
¬p, ¬q, ¬(p∧r)
¬p, ¬q, ¬(p∧r)
¬p, ¬q, ¬p
O
¬p, ¬q, ¬r
O
¬p, ¬q, ¬p
O
¬p, ¬q, ¬r
O
¬p, ¬r, ¬p
O
¬p, ¬r, ¬r
O
¬p, ¬r, ¬q
O
¬p, ¬r, ¬q
O
Formule non contradictoire

f)

$\neg\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]\}$

↙ ↘

$(p \wedge q) \Rightarrow r, \neg[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$ | $\neg[(p \wedge q) \Rightarrow r], (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

↙ ↘ | ↓

$(p \wedge q) \Rightarrow r, \neg(p \Rightarrow r)$ | $(p \wedge q) \Rightarrow r, \neg(q \Rightarrow r)$ | $\neg[(p \wedge q) \Rightarrow r], p \Rightarrow r, q \Rightarrow r$

↓ | ↓ | ↓

$(p \wedge q) \Rightarrow r, p, \neg r$ | $(p \wedge q) \Rightarrow r, q, \neg r$ | $p \wedge q, \neg r, p \Rightarrow r, q \Rightarrow r$

↙ ↘ | ↙ ↘ | ↓

$\neg(p \wedge q), p, \neg r$ | $r, p, \neg r$ | $\neg(p \wedge q), q, \neg r$ | $r, q, \neg r$ | $p, q, \neg r, p \Rightarrow r, q \Rightarrow r$

X (under $r, p, \neg r$) | X (under $r, q, \neg r$)

↙ ↘ | ↙ ↘ | ↙ ↘

$\neg p, p, \neg r$ | $\neg q, p, \neg r$ | $\neg p, q, \neg r$ | $\neg q, q, \neg r$ | $p, q, \neg r, \neg p, q \Rightarrow r$ | $p, q, \neg r, r, q \Rightarrow r$

X | O | O | X | X | X

Formule non valide

$\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]\}$

↙ ↘

$(p \wedge q) \Rightarrow r, (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ | $\neg[(p \wedge q) \Rightarrow r], \neg[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

↓ | ↓

$(p \wedge q) \Rightarrow r, p \Rightarrow r, q \Rightarrow r$ | $p \wedge q, \neg r, \neg[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

↙ ↘ | ↓

$(p \wedge q) \Rightarrow r, \neg p, q \Rightarrow r$ | $(p \wedge q) \Rightarrow r, r, q \Rightarrow r$ | $p, q, \neg r, \neg[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

↙ ↘ | ↙ ↘ | ↙ ↘

$(p \wedge q) \Rightarrow r, \neg p, \neg q$ | $(p \wedge q) \Rightarrow r, \neg p, r$ | $(p \wedge q) \Rightarrow r, r, \neg q$ | $(p \wedge q) \Rightarrow r, r$ | $p, q, \neg r, \neg(p \Rightarrow r)$ | $p, q, \neg r, \neg(q \Rightarrow r)$

↙ ↘ | ↙ ↘ | ↙ ↘ | ↙ ↘ | ↓ | ↓

$\neg(p \wedge q), \neg p, \neg q$ | $r, \neg p, \neg q$ | $\neg(p \wedge q), \neg p, r$ | $\neg p, r$ | $\neg(p \wedge q), r, \neg q$ | $r, \neg q$ | $\neg(p \wedge q), r$ | r | $p, q, \neg r, p, \neg r$ | $p, q, \neg r, q, \neg r$

O (under $r, \neg p, \neg q$) | O (under $\neg p, r$) | O (under $r, \neg q$) | O (under r)

↙ ↘ | ↙ ↘ | ↙ ↘ | ↙ ↘ | ↓ | ↓

$\neg p, \neg p, \neg q$ | $\neg q, \neg p, \neg q$ | $\neg p, \neg p, r$ | $\neg q, \neg p, r$ | $\neg p, r, \neg q$ | $\neg q, r, \neg q$ | $\neg p, r$ | $\neg q, r$ | $p, q, \neg r$ | $p, q, \neg r$

O | O | O | O | O | O | O | O | O | O

Formule non contradictoire

g) $\{[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow r] \wedge [(p \vee q) \Rightarrow s]\} \Rightarrow (r \vee s)$

$$\neg\langle\{[(\neg p \wedge\neg q) \Rightarrow r] \wedge [(p \vee q) \Rightarrow s]\} \Rightarrow (r \vee s)\rangle$$
$$\downarrow$$
$$[(\neg p \wedge\neg q) \Rightarrow r] \wedge [(p \vee q) \Rightarrow s], \neg(r \vee s)$$
$$\downarrow$$
$$(\neg p \wedge\neg q) \Rightarrow r, (p \vee q) \Rightarrow s, \neg(r \vee s)$$
$$\downarrow$$
$$(\neg p \wedge\neg q) \Rightarrow r, (p \vee q) \Rightarrow s, \neg r, \neg s$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$(\neg p \wedge\neg q) \Rightarrow r, \neg(p \vee q), \neg r, \neg s \qquad (\neg p \wedge\neg q) \Rightarrow r, s, \neg r, \neg s$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \text{X}$$
$$(\neg p \wedge\neg q) \Rightarrow r, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\neg(\neg p \wedge\neg q), \neg p, \neg q, \neg r, \neg s \qquad r, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$$
$$\swarrow \quad \searrow \qquad\qquad\qquad \text{X}$$
$$\neg\neg p, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s \qquad \neg\neg q, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$p, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s \qquad q, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$$
$$\text{X} \qquad\qquad \text{X}$$

Formule valide

h-v) En traitant de la même manière les exercices h) à v), on vérifie que l'on parvient bien aux mêmes conclusions que précédemment (voir corrigé de l'exercice 20).

27. a) $\neg(p \wedge r) \Rightarrow \neg r$

$$\neg[\neg(p \wedge r) \Rightarrow \neg r]$$
$$\downarrow$$
$$\neg(p \wedge r), \neg\neg r$$
$$\downarrow$$
$$\neg(p \wedge r), r$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\neg p, r \qquad \neg r, r$$
$$\text{O} \qquad\qquad \text{X}$$

Raisonnement non valide

b) $\{[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge \neg(q \wedge r)\} \Rightarrow \neg p$

$$\neg\langle\{[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge \neg(q \wedge r)\} \Rightarrow \neg p \rangle$$
$$\downarrow$$
$$[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge \neg(q \wedge r), \neg\neg p$$
$$\downarrow$$
$$[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge \neg(q \wedge r), p$$
$$\downarrow$$
$$p \Rightarrow (q \vee r), \neg(q \wedge r), p$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\neg p, \neg(q \wedge r), p \qquad q \vee r, \neg(q \wedge r), p$$
$$\text{X} \qquad\qquad \swarrow \qquad \searrow$$
$$q, \neg(q \wedge r), p \qquad r, \neg(q \wedge r), p$$
$$\swarrow \quad \searrow \qquad \swarrow \quad \searrow$$
$$q, \neg q, p \quad q, \neg r, p \quad r, \neg q, p \quad r, \neg r, p$$
$$\text{X} \qquad \text{O} \qquad \text{O} \qquad \text{X}$$

Raisonnement non valide

c) $\{[(p \wedge r) \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow (p \wedge q)]\} \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

$\neg\langle\{[(p \wedge r) \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow (p \wedge q)]\} \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)\rangle$

↓

$[(p \wedge r) \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow (p \wedge q)], \neg(p \Leftrightarrow q)$

↓

$(p \wedge r) \Rightarrow q, q \Rightarrow (p \wedge q), \neg(p \Leftrightarrow q)$

↙ ↘

$(p \wedge r) \Rightarrow q, q \Rightarrow (p \wedge q), \neg p, q$ — $(p \wedge r) \Rightarrow q, q \Rightarrow (p \wedge q), p, \neg q$

Branch $(p \wedge r) \Rightarrow q, q \Rightarrow (p \wedge q), \neg p, q$:

↙ ↘

$(p \wedge r) \Rightarrow q, \neg q, \neg p, q$ — X

$(p \wedge r) \Rightarrow q, p \wedge q, \neg p, q$ → $(p \wedge r) \Rightarrow q, p, q, \neg p, q$ — X

Branch $(p \wedge r) \Rightarrow q, q \Rightarrow (p \wedge q), p, \neg q$:

↙ ↘

$(p \wedge r) \Rightarrow q, \neg q, p, \neg q$ → $(p \wedge r) \Rightarrow q, \neg q, p$

↙ ↘

$\neg(p \wedge r), \neg q, p$ — $q, \neg q, p$ X

$\neg(p \wedge r), \neg q, p$ ↙ ↘

$\neg p, \neg q, p$ X — $\neg r, \neg q, p$ O

$(p \wedge r) \Rightarrow q, p \wedge q, p, \neg q$ → $(p \wedge r) \Rightarrow q, p, q, p, \neg q$ — X

Raisonnement non valide

d) $[(q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (\neg q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee s)$

$$\neg\{[(q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge(\neg q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee s)\}$$
$$\downarrow$$
$$(q\Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge(\neg q \wedge r),\ \neg(p \vee s)$$
$$\downarrow$$
$$q \Rightarrow p,\ r \Rightarrow s,\ \neg q,\ r,\neg(p \vee s)$$
$$\downarrow$$
$$q \Rightarrow p,\ r \Rightarrow s,\ \neg q,\ r,\ \neg p,\ \neg s$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$
$$q \Rightarrow p,\ \neg r,\ \neg q,\ r,\ \neg p,\ \neg s \qquad q \Rightarrow p,\ s,\ \neg q,\ r,\ \neg p,\ \neg s$$
$$X \qquad\qquad\qquad\qquad X$$

Raisonnement valide

28. a) $\{[(\neg s \vee \neg r) \Rightarrow d] \wedge r \wedge s\} \Rightarrow \neg d$

$$\neg\langle\{[(\neg s \vee\neg r) \Rightarrow d] \wedge r \wedge s\} \Rightarrow\neg d\rangle$$
$$\downarrow$$
$$\{[(\neg s \vee\neg r) \Rightarrow d] \wedge r \wedge s\},\ \neg\neg d$$
$$\downarrow$$
$$\{[(\neg s \vee\neg r) \Rightarrow d] \wedge r \wedge s\},\ d$$
$$\downarrow$$
$$(\neg s \vee\neg r) \Rightarrow d,\ r,\ s,d$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$
$$\neg(\neg s \vee\neg r),\ r,\ s,\ d \qquad d,\ r,\ s,\ d$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad O$$
$$\neg\neg s,\ \neg\neg r,\ r,\ s,\ d$$
$$\downarrow$$
$$s,\ r,\ r,\ s,\ d$$
$$O$$

Raisonnement non valide

b-g) En traitant de la même manière les exercices b) à g), on vérifie que l'on parvient bien aux mêmes conclusions que précédemment (voir corrigé de l'exercice 22).

29. a) $\{(p \vee q) \wedge [q \Leftrightarrow (p \wedge r)]\} \Rightarrow (q \vee \neg r)$

$$\neg\langle\{(p \vee q) \wedge [q \Leftrightarrow (p \wedge r)]\} \Rightarrow (q \vee \neg r)\rangle$$
$$\downarrow$$
$$\{(p \vee q) \wedge [q \Leftrightarrow (p \wedge r)]\}, \neg(q \vee \neg r)$$
$$\downarrow$$
$$\{(p \vee q) \wedge [q \Leftrightarrow (p \wedge r)]\}, \neg q, \neg\neg r$$
$$\downarrow$$
$$\{(p \vee q) \wedge [q \Leftrightarrow (p \wedge r)]\}, \neg q, r$$
$$\downarrow$$
$$p \vee q,\ q \Leftrightarrow (p \wedge r), \neg q, r$$
$$\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$$
$$p,\ q \Leftrightarrow (p \wedge r), \neg q, r \qquad\qquad q,\ q \Leftrightarrow (p \wedge r), \neg q, r$$
$$\text{X (under right branch)}$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$
$$p, q, p \wedge r, \neg q, r \qquad\qquad p, \neg q, \neg(p \wedge r), \neg q, r$$
$$\text{X} \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$p, \neg q, \neg(p \wedge r), r$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$p, \neg q, \neg p, r \qquad\qquad p, \neg q, \neg r, r$$
$$\text{X} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{X}$$

Raisonnement valide

b) $\{(p \vee q) \wedge [(p \wedge q) \Rightarrow r]\} \Rightarrow r$

$$\neg\langle\{(p \vee q) \wedge [(p \wedge q) \Rightarrow r]\} \Rightarrow r\rangle$$
$$\downarrow$$
$$\{(p \vee q) \wedge [(p \wedge q) \Rightarrow r]\}, \neg r$$
$$\downarrow$$
$$p \vee q, (p \wedge q) \Rightarrow r, \neg r$$
$$\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$$
$$p, (p \wedge q) \Rightarrow r, \neg r \qquad\qquad\qquad q, (p \wedge q) \Rightarrow r, \neg r$$
$$\swarrow \qquad \searrow \qquad\qquad\qquad \swarrow \qquad \searrow$$
$$p, \neg(p \wedge q), \neg r \qquad p, r, \neg r \qquad\qquad q, \neg(p \wedge q), \neg r \qquad q, r, \neg r$$
$$\text{X (under } p, r, \neg r) \qquad\qquad \text{X (under } q, r, \neg r)$$
$$\swarrow \quad \searrow \qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow \quad \searrow$$
$$p, \neg p, \neg r \qquad p, \neg q, \neg r \qquad\qquad q, \neg p, \neg r \qquad q, \neg q, \neg r$$
$$\text{X} \qquad\qquad \text{O} \qquad\qquad\qquad \text{O} \qquad\qquad \text{X}$$

Raisonnement non valide

30. {[(¬i ∨ ¬r) ⇒ ¬h] ∧ ¬(i ∧ r ∧ ¬h)} ⇒ [h ⇔ (i ∧ r)]

- ¬{[(¬i ∨ ¬r) ⇒ ¬h] ∧ ¬(i ∧ r ∧ ¬h)} ⇒ [h ⇔ (i ∧ r)]
  - ↓ [(¬i ∨ ¬r) ⇒ ¬h] ∧ ¬(i ∧ r ∧ ¬h), ¬[h ⇔ (i ∧ r)]
    - ↓ (¬i ∨ ¬r) ⇒ ¬h, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), ¬[h ⇔ (i ∧ r)]
      - ↙ (¬i ∨ ¬r) ⇒ ¬h, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), ¬h, (i ∧ r)
        - ↓ (¬i ∨ ¬r) ⇒ ¬h, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), ¬h, i, r
          - ↙ ¬(¬i ∨ ¬r), ¬(i ∧ r ∧ ¬h), ¬h, i, r
            - ↓ ¬¬i, ¬¬r, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), ¬h, i, r
              - ↓ i, r, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), ¬h, i, r
                - ↓ i, r, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), ¬h
                  - ↙ i, r, ¬(i ∧ r), ¬h
                    - ↙ i, r, ¬i, ¬h — X
                    - ↘ i, r, ¬r, ¬h — X
                  - ↘ i, r, ¬¬h, ¬h — X
          - ↘ ¬h, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), ¬h, i, r
            - ↓ ¬h, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), i, r
              - ↙ ¬h, ¬(i ∧ r), i, r
                - ↙ ¬h, ¬i, i, r — X
                - ↘ ¬h, ¬r, i, r — X
              - ↘ ¬h, ¬¬h, i, r — X
      - ↘ (¬i ∨ ¬r) ⇒ ¬h, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), h, ¬(i ∧ r)
        - ↙ ¬(¬i ∨ ¬r), ¬(i ∧ r ∧ ¬h), h, ¬(i ∧ r)
          - ↓ ¬¬i, ¬¬r, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), h, ¬(i ∧ r)
            - ↙ i, r, ¬(i ∧ r), h, ¬(i ∧ r)
              - ↓ i, r, ¬(i ∧ r), h
                - ↙ i, r, ¬i, h — X
                - ↘ i, r, ¬r, h — X
            - ↘ i, r, ¬¬h, h, ¬(i ∧ r)
              - ↓ i, r, h, h, ¬(i ∧ r)
                - ↓ i, r, h, ¬(i ∧ r)
                  - ↙ i, r, h, ¬i — X
                  - ↘ i, r, h, ¬r — X
        - ↘ ¬h, ¬(i ∧ r ∧ ¬h), h, ¬(i ∧ r) — X

Raisonnement valide

31. a) Si vous avez deux enfants en charge et que vos revenus nets n'excèdent pas le montant de 10.000   par an, vous êtes déchargé de tout impôt sur le revenu.

Or, si vous êtes déchargé de tout impôt sur le revenu, vous entrez dans les conditions d'admission dans les habitats sociaux.

Donc si vous n'entrez pas dans les conditions d'admission dans les habitats sociaux, c'est que vous n'avez pas deux enfants à charge ou que vos revenus nets excèdent le montant de 10.000   par an.

$$\neg\langle\{[(p \wedge \neg q) \Rightarrow r] \wedge (r \Rightarrow s)\} \Rightarrow [\neg s \Rightarrow (\neg p \vee q)]\rangle$$

$$\downarrow$$

$$[(p \wedge \neg q) \Rightarrow r] \wedge (r \Rightarrow s), \neg[\neg s \Rightarrow (\neg p \vee q)]$$

$$\downarrow$$

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r, r \Rightarrow s, \neg[\neg s \Rightarrow (\neg p \vee q)]$$

$$\downarrow$$

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r, r \Rightarrow s, \neg s, \neg(\neg p \vee q)$$

$$\downarrow$$

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r, r \Rightarrow s, \neg s, \neg\neg p, \neg q$$

$$\downarrow$$

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r, r \Rightarrow s, \neg s, p, \neg q$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r, \neg r, \neg s, p, \neg q \qquad (p \wedge \neg q) \Rightarrow r, s, \neg s, p, \neg q$$

$$\text{X (branche droite)}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\neg(p \wedge \neg q), \neg r, \neg s, p, \neg q \qquad r, \neg r, \neg s, p, \neg q$$

$$\text{X (branche droite)}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\neg p, \neg r, \neg s, p, \neg q \qquad \neg\neg q, \neg r, \neg s, p, \neg q$$

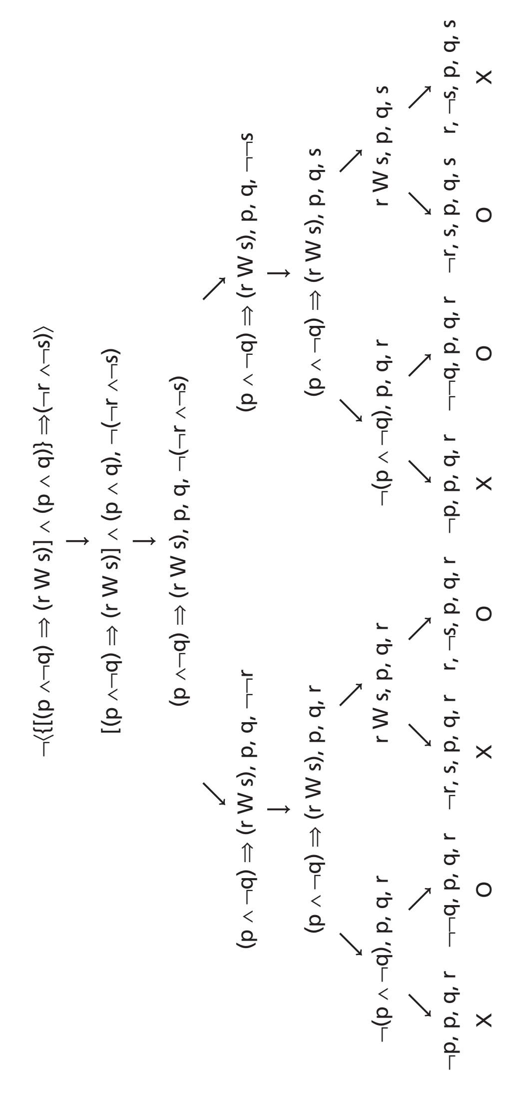
$$\text{X} \qquad\qquad \text{X}$$

Raisonnement valide

b) Si vous avez deux enfants en charge et que vos revenus nets n'excèdent pas le montant de 10.000   par an, alors soit vous êtes déchargé de tout impôt sur le revenu soit vous entrez dans les conditions d'admission dans les habitats sociaux, mais vous ne pouvez pas jouir des deux avantages.

Or, vous avez deux enfants en charge, mais vos revenus nets excèdent le montant de 10.000   par an.

Donc vous n'êtes pas déchargé de tout impôt sur le revenu et vous n'entrez pas non plus dans les conditions d'admission dans les habitats sociaux.



Raisonnement non valide

c) Vous entrez dans les conditions d'admission dans les habitats sociaux si et seulement si vous avez deux enfants en charge et que vos revenus nets n'excèdent pas le montant de 10.000   par an.

Et si vous êtes déchargé de tout impôt sur le revenu, c'est que vos revenus nets n'excèdent pas le montant de 10.000   par an.

Or, vous êtes déchargé de tout impôt sur le revenu, mais vous n'entrez pas dans les conditions d'admission dans les habitats sociaux.

Donc vos revenus nets n'excèdent pas le montant de 10.000   par an, mais vous n'avez pas deux enfants en charge.

$$\neg\langle\{[s \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)] \wedge (r \Rightarrow \neg q) \wedge (r \wedge \neg s)\} \Rightarrow (\neg q \wedge \neg p)\rangle$$

$$\downarrow$$

$$[s \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)] \wedge (r \Rightarrow \neg q) \wedge (r \wedge \neg s),\ \neg(\neg q \wedge \neg p)$$

$$\downarrow$$

$$s \Leftrightarrow (p \wedge \neg q),\ r \Rightarrow \neg q,\ r,\ \neg s,\ \neg(\neg q \wedge \neg p)$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$s \Leftrightarrow (p \wedge \neg q),\ \neg r,\ r,\ \neg s,\ \neg(\neg q \wedge \neg p) \qquad\qquad s \Leftrightarrow (p \wedge \neg q),\ \neg q,\ r,\ \neg s,\ \neg(\neg q \wedge \neg p)$$

$$\text{X}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$s \Leftrightarrow (p \wedge \neg q),\ \neg q,\ r,\ \neg s,\ \neg\neg q \qquad s \Leftrightarrow (p \wedge \neg q),\ \neg q,\ r,\ \neg s,\ \neg\neg p$$

$$\text{X}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$s,\ p \wedge \neg q,\ \neg q,\ r,\ \neg s,\ p \qquad \neg s,\ \neg(p \wedge \neg q),\ \neg q,\ r,\ \neg s,\ p$$

$$\text{X}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\neg s,\ \neg p,\ \neg q,\ r,\ \neg s,\ p \qquad \neg s,\ \neg\neg q,\ \neg q,\ r,\ \neg s,\ p$$

$$\text{X} \qquad\qquad \text{X}$$

Raisonnement valide

32. $l \Leftrightarrow (e \vee a)$

$(l \wedge a) \Rightarrow e$

$a \Rightarrow \neg l$

$$\neg\langle\{[l \Leftrightarrow (e \vee a)] \wedge [(l \wedge a) \Rightarrow e]\} \Rightarrow (a \Rightarrow \neg l)\rangle$$

$$\downarrow$$

$$[l \Leftrightarrow (e \vee a)] \wedge [(l \wedge a) \Rightarrow e],\ \neg(a \Rightarrow \neg l)$$

$$\downarrow$$

$$l \Leftrightarrow (e \vee a),\ (l \wedge a) \Rightarrow e,\ \neg(a \Rightarrow \neg l)$$

$$\downarrow$$

$$l \Leftrightarrow (e \vee a),\ (l \wedge a) \Rightarrow e,\ a,\ \neg\neg l$$

$$\downarrow$$

$$l \Leftrightarrow (e \vee a),\ (l \wedge a) \Rightarrow e,\ a,\ l$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\neg l,\ \neg(e \vee a),\ (l \wedge a) \Rightarrow e,\ a,\ l \qquad l,\ e \vee a,\ (l \wedge a) \Rightarrow e,\ a,\ l$$

$$\text{X}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$l,\ e \vee a,\ \neg(l \wedge a),\ a \qquad\qquad l,\ e \vee a,\ e,\ a$$

$$\swarrow \quad \searrow \qquad\qquad \swarrow \quad \searrow$$

$$l,\ e \vee a,\ \neg l,\ a \qquad l,\ e \vee a,\ \neg a,\ a \qquad l,\ e,\ e,\ a \qquad l,\ a,\ e,\ a$$

$$\text{X} \qquad\qquad \text{X} \qquad\qquad \text{O} \qquad\qquad \text{O}$$

Raisonnement non valide

33. Une formule B est une conséquence logique d'une formule A si elle est vraie « chaque fois que » A est vraie, c'est-à-dire pour tous les modèles qui rendent A vraie. En pratique, on vérifiera que B est vraie pour toutes les lignes du tableau de vérité qui rendent A vraie, de sorte que le conditionnel A ⇒ B est tautologique.

a)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \mathbin{W} q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

On voit que $p \wedge q \models p \vee q$; $p \wedge q \models p \Rightarrow q$; $p \wedge q \models p \Leftrightarrow q$; $p \Leftrightarrow q \models p \Rightarrow q$; $p \mathbin{W} q \models p \vee q$

b)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F	V

On voit que $\neg p \wedge q \models \neg(p \wedge q)$; $p \wedge \neg q \models \neg(p \wedge q)$; $\neg p \wedge \neg q \models \neg(p \wedge q)$

c)

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F

On voit que $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \models p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

34.

p	q	¬p	p ⇒ q	q ∧ p	q	q ∨ ¬q	q ∧ ¬q
V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	F

On voit que $q \wedge \neg q \models q \wedge p$; $q \wedge \neg q \models q$; $q \wedge \neg q \models p \Rightarrow q$; $q \wedge \neg q \models q \vee \neg q$
$q \wedge p \models q$; $q \wedge p \models p \Rightarrow q$; $q \wedge p \models q \vee \neg q$
$q \models p \Rightarrow q$; $q \models q \vee \neg q$
$p \Rightarrow q \models q \vee \neg q$

Donc $q \vee \neg q$ est plus probable que $p \Rightarrow q$, qui est plus probable que q, qui est plus probable que $q \wedge p$, qui est plus probable que $q \wedge \neg q$

35.

p	q	¬q	p ∨ q	p ∧ q	q ∨ ¬q	p ∧ (q∨¬q)	p ⇔ ¬p
V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F

On voit que $p \Leftrightarrow \neg p \models p \wedge q$; $p \Leftrightarrow \neg p \models p \wedge (q \vee \neg q)$; $p \Leftrightarrow \neg p \models p \vee q$
$p \wedge q \models p \wedge (q \vee \neg q)$; $p \wedge q \models p \vee q$
$p \wedge (q \vee \neg q) \models p \vee q$

Donc $p \vee q$ est plus probable que $p \wedge (q \vee \neg q)$, qui est plus probable que $p \wedge q$, qui est plus probable que $p \Leftrightarrow \neg p$

36. Dans la mesure où elles sont rendues vraies par toutes les interprétations sans exception, toutes les tautologies possèdent les mêmes modèles et sont donc logiquement équivalentes entre elles.

37.

p	q	¬p	¬q	p ⇒ q	q ⇒ p	¬p ⇒ ¬q	¬q ⇒ ¬p
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

$p \Rightarrow q$ est logiquement équivalent à $\neg q \Rightarrow \neg p$; $q \Rightarrow p$ est logiquement équivalent à $\neg p \Rightarrow \neg q$

38. « Pour être scientifique, une théorie doit être réfutable » se formalise $s \Rightarrow r$. Elle est équivalente aux propositions a), c), d), qui se formalisent de la même façon. Comme nous venons de le voir, elle est aussi logiquement équivalente à la proposition e), qui se forma-

lise $\neg r \Rightarrow \neg s$. Elle n'est par contre pas équivalente aux propositions b) et f), qui se formalisent $r \Rightarrow s$.

39. Comme on peut le vérifier à l'aide des tables de vérité ou des tableaux sémantiques :

a) $s \Rightarrow \neg c$ est logiquement équivalent à $\neg(s \wedge c)$.

b) $c \Rightarrow (\neg s \wedge \neg a)$ est logiquement équivalent à $(c \Rightarrow \neg s) \wedge (c \Rightarrow \neg a)$.

c) $e \Rightarrow (s \vee a)$ est logiquement équivalent à $(e \Rightarrow s) \vee (e \Rightarrow a)$.

d) $\neg[s \Rightarrow (\neg c \wedge \neg r)]$ est logiquement équivalent à $s \wedge (c \vee r)$.

40. r) Si une proposition est vraie, alors tous les conditionnels qui l'ont pour conséquent sont vrais, quelle que soit la proposition antécédente.

s) Si une proposition est fausse, alors tous les conditionnels qui l'ont pour antécédent sont vrais, quelle que soit la proposition conséquente.

t) De deux propositions quelconques, l'une est toujours reliée à l'autre ou à la négation de l'autre par un biconditionnel vrai.

u) Parmi trois propositions quelconques, il y en a toujours au moins deux qui sont reliées par un biconditionnel vrai.

41.

$$\neg\{[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)\}$$
$$\downarrow$$
$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r), \neg(p \Rightarrow r)$$
$$\downarrow$$
$$(p \Rightarrow q), (q \Rightarrow r), \neg(p \Rightarrow r)$$
$$\downarrow$$
$$(p \Rightarrow q), (q \Rightarrow r), p, \neg r$$
$$\swarrow \qquad\qquad\qquad \searrow$$
$$\neg p, (q \Rightarrow r), p, \neg r \qquad\qquad q, (q \Rightarrow r), p, \neg r$$
$$\text{X} \qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow \qquad\qquad \searrow$$
$$q, \neg q, p, \neg r \qquad\qquad q, r, p, \neg r$$
$$\text{X} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{X}$$

42. a) Il est faux que le coupable ne soit ni un homme et ni une femme.

b) Il est faux que cet homme ait foi ou loi.

c) On n'est pas ou on n'a pas été.

43.

a)	$s \Rightarrow \neg c$	$\leftrightarrow$	$\neg s \vee \neg c$
		$\leftrightarrow$	$\neg(s \wedge c)$
b)	$c \Rightarrow (\neg s \wedge \neg a)$	$\leftrightarrow$	$\neg c \vee (\neg s \wedge \neg a)$
		$\leftrightarrow$	$(\neg c \vee \neg s) \wedge (\neg c \vee \neg a)$
		$\leftrightarrow$	$(c \Rightarrow \neg s) \wedge (c \Rightarrow \neg a)$
c)	$e \Rightarrow (s \vee a)$	$\leftrightarrow$	$\neg e \vee (s \vee a)$
		$\leftrightarrow$	$\neg e \vee s \vee a$
		$\leftrightarrow$	$\neg e \vee s \vee \neg e \vee a$
		$\leftrightarrow$	$(e \Rightarrow s) \vee (e \Rightarrow a)$
d)	$\neg[s \Rightarrow (\neg c \wedge \neg r)]$	$\leftrightarrow$	$s \wedge \neg(\neg c \wedge \neg r)$
		$\leftrightarrow$	$s \wedge (c \vee r)$

44. a) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$\leftrightarrow \neg[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \vee (p \Rightarrow r)$

$\leftrightarrow [\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow r)] \vee (\neg p \vee r)$

$\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \vee (\neg p \vee r)$

$\leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$ FND

$\leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r) \vee (p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (q\wedge\neg r\wedge p) \vee (q\wedge\neg r\wedge\neg p) \vee (\neg p\wedge q) \vee (\neg p\wedge\neg q) \vee (r\wedge p) \vee (r\wedge\neg p)$

$\leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r) \vee (p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (q\wedge\neg r\wedge p) \vee (q\wedge\neg r\wedge\neg p) \vee (\neg p\wedge q\wedge r) \vee (\neg p\wedge q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge\neg q\wedge r)$
$\vee (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (r\wedge p\wedge q) \vee (r\wedge p\wedge\neg q) \vee (r\wedge\neg p\wedge q) \vee (r\wedge\neg p\wedge\neg q)$

$\leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r) \vee (p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (p\wedge q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge q\wedge r) \vee (\neg p\wedge q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge\neg q\wedge r)$
$\vee (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (p\wedge q\wedge r) \vee (p\wedge\neg q\wedge r) \vee (\neg p\wedge q\wedge r) \vee (\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

$\leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r) \vee (p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (p\wedge q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge q\wedge r) \vee (\neg p\wedge\neg q\wedge r) \vee$
$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (p\wedge q\wedge r)$ FND développée

C'est une tautologie.

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$\leftrightarrow \neg[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \vee (p \Rightarrow r)$

$\leftrightarrow [\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow r)] \vee (\neg p \vee r)$

$\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \vee (\neg p \vee r)$

$\leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee (\neg p \vee r)$

$\leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee (\neg p \vee r)$

$\leftrightarrow (p \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg p \vee r)$ FNC et FNC développée

Les trois termes contiennent des littéraux complémentaires. La formule est une tautologie.

b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$

$\leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)] \wedge [(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$

$\leftrightarrow [\neg(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \Rightarrow \neg q)] \wedge [\neg(\neg p \Rightarrow \neg q) \vee (p \Rightarrow q)]$

$\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg p \vee \neg q)] \wedge [(\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg p \vee q)]$

$\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg q)] \wedge [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)]$

$\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee p \vee \neg q] \wedge [(\neg p \wedge q) \vee \neg p \vee q]$

$\leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg p\wedge q) \vee (p\wedge\neg q\wedge\neg p) \vee (p\wedge\neg q\wedge q) \vee (p\wedge\neg p\wedge q) \vee (p\wedge\neg p) \vee (p\wedge q) \vee (\neg q\wedge\neg p\wedge q) \vee$
$(\neg q\wedge\neg p) \vee (\neg q\wedge q)$

$\leftrightarrow (p\wedge q) \vee (\neg q\wedge\neg p)$ FND et FND développée

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$

$\leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)] \wedge [(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$

$\leftrightarrow [\neg(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \Rightarrow \neg q)] \wedge [\neg(\neg p \Rightarrow \neg q) \vee (p \Rightarrow q)]$

$\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg p \vee \neg q)] \wedge [(\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg p \vee q)]$

$\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg q)] \wedge [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)]$

$\leftrightarrow [(p \vee p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee p \vee \neg q)] \wedge [(\neg p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q)]$

$\leftrightarrow [(p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee p)] \wedge [(\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)]$

$\leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ FNC et FNC développée

45. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

$\leftrightarrow \neg[\neg(p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(p \wedge \neg q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge r)]$

$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

$\leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q \vee \neg\neg r) \vee \neg(\neg p \vee \neg\neg q \vee \neg r) \vee \neg(\neg\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

$\leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee \neg(\neg p \vee q \vee \neg r) \vee \neg(p \vee \neg q \vee \neg r)$

46. a) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$

$\leftrightarrow \neg[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \vee \neg q$

$\leftrightarrow [\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg\neg p] \vee \neg q$

$\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee p] \vee \neg q$

$\leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee p \vee \neg q$ FND

$\leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg p)$

$\leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ FND développée

La formule est vraie dans 3 des 4 cas possibles. Elle n'est ni valide ni inconsistante.

n) $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$

$\leftrightarrow (\neg p \wedge p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p \wedge \neg q)$ FND développée

Les deux termes contiennent des littéraux complémentaires. C'est une contradiction.

o) $(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee r)$

$\leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (q \vee r)$

$\leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \vee r$ FND

Si on la développait, cette forme normale disjonctive contiendrait 8 termes et serait manifestement tautologique. Mais la présence de q et $\neg q$ parmi les termes de la disjonction non développée indique déjà ce résultat.

47. $(e \wedge \neg m) \Rightarrow a$

$\leftrightarrow \neg(e \wedge \neg m) \vee a$

$\leftrightarrow (\neg e \vee \neg\neg m) \vee a$

$\leftrightarrow \neg e \vee m \vee a$

$\neg a \Rightarrow (\neg e \vee m)$

$\leftrightarrow \neg\neg a \vee (\neg e \vee m)$

$\leftrightarrow a \vee \neg e \vee m$

$\leftrightarrow \neg e \vee m \vee a$

48. $\{(w \vee q) \wedge [(w \vee r) \Rightarrow q] \wedge [(q \vee r) \Rightarrow w]\} \Rightarrow (w \wedge q)$

$\leftrightarrow \neg\{(w \vee q) \wedge [(w \vee r) \Rightarrow q] \wedge [(q \vee r) \Rightarrow w]\} \vee (w \wedge q)$

$\leftrightarrow \{\neg(w \vee q) \vee \neg[(w \vee r) \Rightarrow q] \vee \neg[(q \vee r) \Rightarrow w]\} \vee (w \wedge q)$

$\leftrightarrow \{(\neg w \wedge \neg q) \vee [(w \vee r) \wedge \neg q] \vee [(q \vee r) \wedge \neg w]\} \vee (w \wedge q)$

$\leftrightarrow \{(\neg w \wedge \neg q) \vee [(w \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q)] \vee [(q \wedge \neg w) \vee (r \wedge \neg w)]\} \vee (w \wedge q)$

$\leftrightarrow (\neg w \wedge \neg q) \vee (w \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg w) \vee (r \wedge \neg w) \vee (w \wedge q)$ FND

$\leftrightarrow (\neg w \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg w \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (w \wedge \neg q \wedge r) \vee (w \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q \wedge w) \vee (r \wedge \neg q \wedge \neg w) \vee (q \wedge \neg w \wedge r) \vee (q \wedge \neg w \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg w \wedge q) \vee (r \wedge \neg w \wedge \neg q) \vee (w \wedge q \wedge r) \vee (w \wedge q \wedge \neg r)$

$\leftrightarrow (\neg w \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg w \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (w \wedge \neg q \wedge r) \vee (w \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg w \wedge r) \vee (q \wedge \neg w \wedge \neg r) \vee (w \wedge q \wedge r) \vee (w \wedge q \wedge \neg r)$ FND développée

C'est une tautologie

49. $\{d \Rightarrow [(c \Rightarrow p) \wedge (\neg c \Rightarrow e)]\} \wedge \{\neg d \Rightarrow [(c \vee \neg c) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg e)]\} \wedge \neg(p \wedge e)$

$\leftrightarrow \{\neg d \vee [(c \Rightarrow p) \wedge (\neg c \Rightarrow e)]\} \wedge \{\neg\neg d \vee [(c \vee \neg c) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg e)]\} \wedge (\neg p \vee \neg e)$

$\leftrightarrow \{\neg d \vee [(\neg c \vee p) \wedge (\neg\neg c \vee e)]\} \wedge \{d \vee [\neg(c \vee \neg c) \vee (\neg p \wedge \neg e)]\} \wedge (\neg p \vee \neg e)$

$\leftrightarrow \{\neg d \vee [(\neg c \vee p) \wedge (c \vee e)]\} \wedge \{d \vee [(\neg c \wedge \neg\neg c) \vee (\neg p \wedge \neg e)]\} \wedge (\neg p \vee \neg e)$

$\leftrightarrow \{\neg d \vee [(\neg c \wedge c) \vee (p \wedge c) \vee (\neg c \wedge e) \vee (p \wedge e)]\} \wedge \{d \vee [(\neg c \wedge c) \vee (\neg p \wedge \neg e)]\} \wedge (\neg p \vee \neg e)$

$\leftrightarrow \{\neg d \vee (p \wedge c) \vee (\neg c \wedge e) \vee (p \wedge e)\} \wedge \{d \vee (\neg p \wedge \neg e)\} \wedge (\neg p \vee \neg e)$

$\leftrightarrow$ $\{\neg d \vee (p\wedge c) \vee (\neg c\wedge e) \vee (p\wedge e)\} \wedge \{(d\wedge\neg p)\vee (\neg p\wedge\neg e\wedge\neg p) \vee (d\wedge\neg e) \vee (\neg p\wedge\neg e\wedge\neg e)\}$

$\leftrightarrow$ $\{\neg d \vee (p\wedge c) \vee (\neg c\wedge e) \vee (p\wedge e)\} \wedge \{(d\wedge\neg p)\vee (\neg p\wedge\neg e) \vee (d\wedge\neg e) \vee (\neg p\wedge\neg e)\}$

$\leftrightarrow$ $\{\neg d \vee (p\wedge c) \vee (\neg c\wedge e) \vee (p\wedge e)\} \wedge \{(d\wedge\neg p)\vee (\neg p\wedge\neg e) \vee (d\wedge\neg e)\}$

$\leftrightarrow$ $(\neg d\wedge d\wedge\neg p) \vee (p\wedge c\wedge d\wedge\neg p) \vee (\neg c\wedge e\wedge d\wedge\neg p) \vee (p\wedge e\wedge d\wedge\neg p) \vee (\neg d\wedge\neg p\wedge\neg e) \vee (p\wedge c\wedge\neg p\wedge\neg e) \vee (\neg c\wedge e\wedge\neg p\wedge\neg e) \vee (p\wedge e\wedge\neg p\wedge\neg e) \vee (\neg d\wedge d\wedge\neg e) \vee (p\wedge c\wedge d\wedge\neg e) \vee (\neg c\wedge e\wedge d\wedge\neg e) \vee (p\wedge e\wedge d\wedge\neg e)$

$\leftrightarrow$ $(\neg c\wedge e\wedge d\wedge\neg p) \vee (\neg d\wedge\neg p\wedge\neg e) \vee (p\wedge c\wedge d\wedge\neg e)$ FND

$\leftrightarrow$ $(\neg c\wedge e\wedge d\wedge\neg p) \vee (\neg d\wedge\neg p\wedge\neg e\wedge p) \vee (\neg d\wedge\neg p\wedge\neg e\wedge\neg p) \vee (p\wedge c\wedge d\wedge\neg e)$ FND dével.

De ces 4 situations, la seule où *p* est vraie (et *e* faux) est celle où Dieu existe et je crois en lui.

50. $[p \Rightarrow (l \vee s)] \wedge \neg(l \wedge g) \wedge \neg(g \wedge s \wedge \neg c) \wedge (c \Rightarrow \neg m) \wedge (m \wedge g)$

$\leftrightarrow$ $[\neg p \vee (l \vee s)] \wedge (\neg l \vee \neg g) \wedge (\neg g \vee \neg s \vee \neg\neg c) \wedge (\neg c \vee \neg m) \wedge (m \wedge g)$

$\leftrightarrow$ $(\neg p \vee l \vee s) \wedge (\neg l \vee \neg g) \wedge (\neg g \vee \neg s \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg m) \wedge m \wedge g$ FNC

$\rightarrow$ $(\neg p \vee s \vee \neg g) \wedge (\neg g \vee \neg s \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg m) \wedge m \wedge g$

$\rightarrow$ $(\neg p \vee \neg g \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg m) \wedge m \wedge g$

$\rightarrow$ $(\neg p \vee \neg g \vee \neg m) \wedge m \wedge g$

$\rightarrow$ $(\neg p \vee \neg g) \wedge g$

$\rightarrow$ $\neg p$

51. a) $[(m \wedge c) \Rightarrow (f \Rightarrow p)] \wedge m \wedge (p \Rightarrow \neg c)$

$\leftrightarrow$ $[\neg(m \wedge c) \vee (f \Rightarrow p)] \wedge m \wedge (\neg p \vee \neg c)$

$\leftrightarrow$ $[(\neg m \vee \neg c) \vee (\neg f \vee p)] \wedge m \wedge (\neg p \vee \neg c)$

$\leftrightarrow$ $(\neg m \vee \neg c \vee \neg f \vee p) \wedge m \wedge (\neg p \vee \neg c)$ FNC

$\rightarrow$ $(\neg c \vee \neg f \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg c)$

$\rightarrow$ $\neg c \vee \neg f$

Il n'est pas vrai que chaque mouvement a une cause ou il n'est pas vrai que la régression dans la chaîne des causes doit avoir une fin.

b) $[p \Rightarrow (b \wedge o)] \wedge \neg(b \wedge o \wedge c)$

$\leftrightarrow$ $[\neg p \vee (b \wedge o)] \wedge (\neg b \vee \neg o \vee \neg c)$

$\leftrightarrow$ $(\neg p \vee b) \wedge (\neg p \vee o) \wedge (\neg b \vee \neg o \vee \neg c)$ FNC

$\rightarrow$ $(\neg p \vee b) \wedge (\neg p \vee \neg b \vee \neg c)$

$\rightarrow$ $\neg p \vee \neg c$

Dieu n'est pas parfait ou il n'a pas créé ce monde de souffrances.

53. a) $\neg t \Rightarrow \neg r$ (ou $r \Rightarrow t$)

Or t

Donc r

Raisonnement non valide : Négation de l'antécédent (ou Affirmation du conséquent)

b) $t \Rightarrow r$

Or t

Donc r

Raisonnement valide : Modus Ponens

c) $\neg(b \wedge \neg a)$ (ou $\neg a \Rightarrow \neg b$)
Or b
Donc a
Raisonnement valide : Incompatibilité (ou Modus Tollens)

d) $\neg c \Rightarrow \neg s$
Or $\neg c$
Donc $\neg s$
Raisonnement valide : Modus Ponens

e) $\neg p \Rightarrow \neg c$ (ou $c \Rightarrow p$)
Or p
Donc c
Raisonnement non valide : Négation de l'antécédent (ou Affirmation du conséquent)

f) $t \Rightarrow m$ (ou $\neg(t \wedge \neg m)$)
Or m
Donc t
Raisonnement non valide : Affirmation du conséquent

g) $d \Leftrightarrow s$
Or d
Donc s
Raisonnement valide : Modus Ponens

h) $v\ W \neg g$ (ou $g \Leftrightarrow v$)
Or g
Donc v
Raisonnement valide : Alternative (ou Modus Ponens)

i) $\neg(e \wedge a)$
Or e
Donc $\neg a$
Raisonnement valide : Incompatibilité

j) $c \vee d$
Or $c \Rightarrow p$
Et $d \Rightarrow p$
Donc p
Raisonnement valide : Dilemme

54. a)

(1)	| p	*Hyp.*
(2)	| p	*1, Réit.*
(3)	$p \Rightarrow p$	*1, 2, Déch. 1 I⇒*

La démonstration est, on le voit, immédiate et contraste, à cet égard, avec la démonstration de la même formule au moyen de la méthode axiomatique (cf. théorie p. 53).

b)

(1)	| $p \Rightarrow q$	*Hyp.*
(2)	| | $p \wedge \neg q$	*Hyp.*
(3)	| | p	*2, E∧*
(4)	| | q	*1, 3, E⇒*

	(5)	│ │ ¬q	*2, E∧*
	(6)	│ ¬(p∧¬q)	*4, 5 Déch. 2 I¬*
	(7)	(p⇒q) ⇒ ¬(p∧¬q)	*1, 6, Déch. 1 I⇒*
	(8)	│ ¬(p∧¬q)	*Hyp.*
	(9)	│ │ p	*Hyp.*
	(10)	│ │ │ ¬q	*Hyp.*
	(11)	│ │ │ p∧¬q	*9, 10, I∧*
	(12)	│ │ ¬¬q	*8, 11, Déch. 10 I¬*
	(13)	│ │ q	*12, E ¬*
	(14)	│ p⇒q	*9, 13, Déch. 9 I⇒*
	(15)	¬(p∧¬q) ⇒ (p⇒q)	*8, 14, Déch. 8 I⇒*
	(16)	(p⇒q) ⇔ ¬(p∧¬q)	*7,15, I⇔*

c)	(1)	│ p⇒q	*Hyp.*
	(2)	│ │ ¬q	*Hyp.*
	(3)	│ │ │ p	*Hyp.*
	(4)	│ │ │ q	*1, 3, E⇒*
	(5)	│ │ ¬p	*2, 4, Déch. 3 I¬*
	(6)	│ ¬q⇒¬p	*2, 5, Déch. 2 I⇒*
	(7)	(p⇒q) ⇒ (¬q⇒¬p)	*1, 6, Déch. 1 I⇒*
	(8)	│ ¬q⇒¬p	*Hyp.*
	(9)	│ │ p	*Hyp.*
	(10)	│ │ │ ¬q	*Hyp.*
	(11)	│ │ │ ¬p	*8, 10, E⇒*
	(12)	│ │ ¬¬q	*9, 11, Déch. 10 I¬*
	(13)	│ │ q	*12, E ¬*
	(14)	│ p⇒q	*9, 13, Déch. 9 I⇒*
	(15)	(¬q⇒¬p) ⇒ (p⇒q)	*8, 14, Déch. 8 I⇒*
	(16)	(p⇒q) ⇔ (¬q⇒¬p)	*7,15, I⇔*

d)	(1)	│ ¬(p∧q)	*Hyp.*
	(2)	│ │ ¬(¬p∨¬q)	*Hyp.*
	(3)	│ │ │ ¬p	*Hyp.*
	(4)	│ │ │ ¬p∨¬q	*3, I∨*
	(5)	│ │ p	*2, 4, Déch. 3, I¬*
	(6)	│ │ │ ¬q	*Hyp.*
	(7)	│ │ │ ¬p∨¬q	*6, I∨*
	(8)	│ │ q	*2, 7, Déch. 6, I¬*
	(9)	│ │ p∧q	*5, 8, I∧*
	(10)	│ ¬¬(¬p∨¬q)	*1, 9, Déch. 2 I¬*
	(11)	│ ¬p∨¬q	*10, E ¬*
	(12)	¬(p∧q) ⇒ (¬p∨¬q)	*1, 11, Déch. 1 I⇒*
	(13)	│ ¬p∨¬q	*Hyp.*
	(14)	│ │ ¬p │ ¬q	*Hyp. – Hyp.*

(15)	│ │ │ p∧q │ │ p∧q	*Hyp. – Hyp.*
(16)	│ │ │ p │ │ q	*15, E∧ – 15, E∧*
(17)	│ │ ¬(p∧q) │ ¬(p∧q)	*14, 16, Déch. 15 I¬ – idem*
(18)	│ ¬(p∧q)	*13, 17, Déch. 14 E∨*
(19)	(¬p∨¬q) ⇒ ¬(p∧q)	*13, 18, Déch. 13 I⇒*
(20)	¬(p∧q) ⇔ (¬p∨¬q)	*11, 18, I⇔*

e) Nous allons cette fois réutiliser des résultats démontrés précédemment.

(1)	│ p⇒(q⇒r)	*Hyp.*
(2)	│ │ ¬[(p∧q)⇒r]	*Hyp.*
(3)	│ │ (p∧q)∧¬r	*Transf. cond. en conj. (cf. b)*
(4)	│ │ p	*3, E∧*
(5)	│ │ q⇒r	*1, 4, E⇒*
(6)	│ │ q	*3, E∧*
(7)	│ │ r	*5, 6, E⇒*
(8)	│ │ ¬r	*3, E∧*
(9)	│ ¬¬[(p∧q)⇒r]	*7, 8, Déch. 2 I¬*
(10)	│ (p∧q)⇒r	*9, E¬*
(11)	[p⇒(q⇒r)] ⇒ [(p∧q)⇒r]	*1, 10, Déch. 1 I⇒*
(12)	│ (p∧q)⇒r	*Hyp.*
(13)	│ │ ¬[p⇒(q⇒r)]	*Hyp.*
(14)	│ │ p∧¬(q⇒r)	*Transf. cond. en conj. (cf. b)*
(15)	│ │ ¬(q⇒r)	*14, E∧*
(16)	│ │ q∧¬r	*Transf. cond. en conj. (cf. b)*
(17)	│ │ p	*14, E∧*
(18)	│ │ q	*16, E∧*
(19)	│ │ p∧q	*17, 18, I∧*
(20)	│ │ r	*12, 19, E⇒*
(21)	│ │ ¬r	*16, E∧*
(22)	│ ¬¬[p⇒(q⇒r)]	*20, 21, Déch. 13 I¬*
(23)	│ [p⇒(q⇒r)]	*22, E¬*
(24)	[(p∧q)⇒r] ⇒ [p⇒(q⇒r)]	*12, 23, Déch. 12 I⇒*
(25)	[p⇒(q⇒r)] ⇔ [(p∧q)⇒r]	*11, 24, I⇔*

55.

(1)	│ (p⇒q) ∧ (q⇒r)	Hyp.
(2)	│ p⇒q	*1, E∧*
(3)	│ q⇒r	*1, E∧*
(4)	│ │ p	*Hyp.*
(5)	│ │ q	*2, 4, E⇒*
(6)	│ │ r	*3, 5, E⇒*
(7)	│ p⇒r	*4, 6, Déch. 4 I⇒*
(8)	[(p⇒q) ∧ (q⇒r)] ⇒ [p⇒r]	*1, 7, Déch. 1 I⇒*

56.		(1)	$\mid (m \vee d) \Rightarrow i$	Hyp.
		(2)	$\mid \quad \mid m$	*Hyp.*
		(3)	$\mid \quad \mid m \vee d$	*2, I∨*
		(4)	$\mid \quad \mid i$	*1, 3, E⇒*
		(5)	$\mid m \Rightarrow i$	*2, 4, Déch. 2 I⇒*
		(6)	$[(m \vee d) \Rightarrow i] \Rightarrow (m \Rightarrow i)$	*1, 5, Déch. 1 I⇒*
57.	a)	(1)	$\neg d \Rightarrow a$	*Pr.*
		(2)	$\neg s \Rightarrow a$	*Pr.*
		(3)	$\neg a$	*Pr.*
		(4)	$\mid \neg d \vee \neg s$	*Hyp.*
		(5)	$\mid \quad \mid \neg d \quad \mid \neg s$	*Hyp. – Hyp.*
		(6)	$\mid \quad \mid a \quad \mid a$	*1, 5, E⇒ – 2, 5, E⇒*
		(7)	$\mid a$	*4,6, Déch. 5 E∨*
		(8)	$\neg(\neg d \vee \neg s)$	*3, 7, Déch. 4 I¬*
	b)	(1)	$u \Leftrightarrow p$	*Pr.*
		(2)	$p \Rightarrow \neg r$	*Pr.*
		(3)	$c \Rightarrow (h \wedge \neg r)$	*Pr.*
		(4)	$\mid u \vee c$	*Hyp.*
		(5)	$\mid \quad \mid u \quad \mid c$	*Hyp. – Hyp.*
		(6)	$\mid \quad \mid p \quad \mid h \wedge \neg r$	*1, 5, E⇔ – 3, 5, E⇒*
		(7)	$\mid \quad \mid \neg r \quad \mid \neg r$	*2, 6, E⇒ – 6, E∧*
		(8)	$\mid \neg r$	*4, 7, Déch. 5 E∨*
		(9)	$(u \vee c) \Rightarrow \neg r$	*4, 8, Déch. 4 I⇒*
	c)	(1)	$d \vee u$	*Pr.*
		(2)	$f \Rightarrow \neg d$	*Pr.*
		(3)	$\mid d \quad \mid u$	*Hyp. – Hyp.*
		(4)	$\mid \quad \mid f \quad \mid \neg f \vee u$	*Hyp. – 3, I∨*
		(5)	$\mid \quad \mid \neg d \quad \mid$	*2, 4, E⇒*
		(6)	$\mid \neg f \quad \mid$	*3, 5, Déch. 4 I¬*
		(7)	$\mid \neg f \vee u \quad \mid \neg f \vee u$	*6, I∨ – 4, Réit.*
		(8)	$\neg f \vee u$	*1, 7, Déch. 3 E∨*

58. Réponse : b) La règle du détachement traduit le Modus Ponens, mais il est à noter qu'elle ne s'applique ici qu'à des thèses alors que le Modus Ponens permettait d'inférer une conclusion à supposer que les prémisses soient vraies.

59.	a)	(1)	$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow m) \Rightarrow (p \Rightarrow m)]$	*A1*
		(2)	$\vdash [(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p] \Rightarrow [(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))]$	*1, subst. p/¬p⇒p, q/p, m/¬p⇒q*
		(3)	$\vdash (\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$	*A3*
		(4)	$\vdash (p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))$	*2, 3, détachement*
		(5)	$\vdash p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	*A2*
		(6)	$\vdash (\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	*4, 5, détachement*

b)

(1)	$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow m) \Rightarrow (p \Rightarrow m)]$	*A1*
(2)	$\vdash [(\neg p\Rightarrow p) \Rightarrow (\neg p\Rightarrow q)] \Rightarrow [((\neg p\Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow ((\neg p\Rightarrow p) \Rightarrow p)]$	*1, subst. p/¬p⇒p, q/¬p⇒q, m/p*
(3)	$\vdash (\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow (\neg p\Rightarrow q)$	*Exercice a)*
(4)	$\vdash ((\neg p\Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow ((\neg p\Rightarrow p) \Rightarrow p)$	*2, 3, détachement*

c) On va démontrer que si l'axiome 3 a une conséquence *P*, alors *P* est aussi la conséquence de $(\neg p\Rightarrow q) \Rightarrow p$. Donc on va démontrer : $\{[(\neg p\Rightarrow p) \Rightarrow p] \Rightarrow P\} \Rightarrow \{[(\neg p\Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow P\}$

(1)	$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow m) \Rightarrow (p \Rightarrow m)]$	*A1*
(2)	$\vdash [((\neg p\Rightarrow q)\Rightarrow p) \Rightarrow ((\neg p\Rightarrow p)\Rightarrow p)] \Rightarrow \{[((\neg p\Rightarrow p)\Rightarrow p) \Rightarrow P] \Rightarrow [((\neg p\Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow P]\}$	*1, subst. p/(¬p⇒q)⇒p, q/(¬p⇒p)⇒p, m/P*
(3)	$\vdash ((\neg p\Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow ((\neg p\Rightarrow p) \Rightarrow p)$	*Exercice b)*
(4)	$\vdash [((\neg p\Rightarrow p)\Rightarrow p) \Rightarrow P] \Rightarrow [((\neg p\Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow P]$	*2, 3, détachement*

d) Le théorème à démontrer s'obtient en fait comme simple substitution dans le théorème $p\Rightarrow p$, démontré dans la théorie *à la page 53* :

(1)	$\vdash p \Rightarrow p$	*Théorème démontré*
(2)	$\vdash (\neg\neg p\Rightarrow\neg p)\Rightarrow (\neg\neg p\Rightarrow\neg p)$	*1, subst. p/¬¬p⇒¬p*

Une autre possibilité consiste à opérer une substitution à partir du théorème démontré dans l'exercice a) ci-dessus :

(1)	$\vdash (\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	*Exercice a)*
(2)	$\vdash (\neg\neg p\Rightarrow\neg p)\Rightarrow (\neg\neg p\Rightarrow\neg p)$	*1, subst. p/¬p, q/¬p*

e)

(1)	$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow m) \Rightarrow (p \Rightarrow m)]$	*A1*
(2)	$\vdash ((\neg p\Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow [(p\Rightarrow p) \Rightarrow ((\neg p\Rightarrow p) \Rightarrow p)]$	*1,subst. p/(¬p⇒p), q/p, m/p*
(3)	$\vdash (\neg p\Rightarrow p) \Rightarrow p$	*A3*
(4)	$\vdash (p\Rightarrow p) \Rightarrow [(\neg p\Rightarrow p)\Rightarrow p]$	*2, 3, détachement*



Exercices sur la logique des prédicats

60. a) E (Aucune rose n'est sans épines) ou A (Toutes les roses ont des épines), équivalente par obversion à la précédente

b) A (Tous les actes répréhensibles sont explicitement interdits par la loi)

c) O (Certaines vérités ne sont pas bonnes à dire)

d) I (Certaines vérités sont dérangeantes)

e) O (Certaines vérités ne sont pas vraisemblables)

f) A (Tout ce qui est aimable est vrai)

g) E (Aucun plaisir n'est tel qu'il ne perdrait pas à être connu) ou A (Tous les plaisirs perdent à être connus) équivalente par obversion

h) E (Aucun roi n'a un cœur)

61. a) Certains complices de vol sont receleurs (conversion partielle)

b) Aucun majeur n'est mineur (conversion simple)

c) Certains délinquants sont fils de bonnes familles (conversion simple)

d) Une proposition de type « O » n'est pas convertible.

62. a) Aucun conseiller juridique n'est imprévoyant

b) Tous les sentiments sont temporaires

c) Certains produits d'entretien ne sont pas sans danger

63. O (comme on le voit en considérant le carré logique)

64. Aucune substance n'est immatérielle : E (V/F)

Contradictoire : Certaines substances sont immatérielles (F/V)

Contraire : Toutes les substances sont immatérielles (F/ ?)

Subalterne : Certaines substances ne sont pas immatérielles (V/ ?)

Obverse : Toutes les substances sont matérielles (V/F)

Converse : Rien de ce qui est immatériel n'est une substance (V/F)

Il y a des tristesses sans motif : I (V/F)

Contradictoire : Aucune tristesse n'est sans motif (F/V)

Subcontraire : Certaines tristesses ne sont pas sans motif (?/V)

Superalterne : Toutes les tristesses sont sans motif (?/F)

Obverse : Il y a des tristesses qui ne sont pas motivées (V/F)

Converse : Certaines choses sans motif sont des tristesses (V/F)

65. a) subalterne

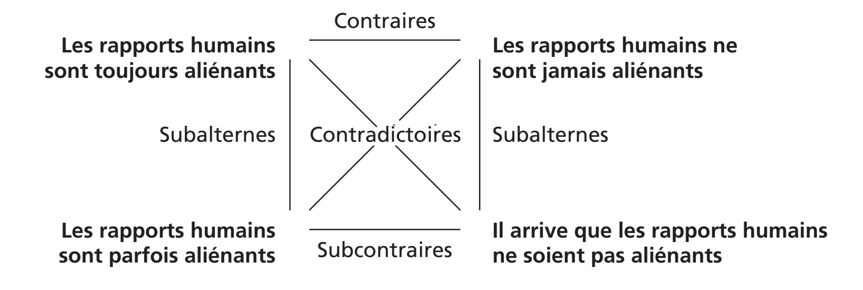
b) contraire

c) équivalente par obversion

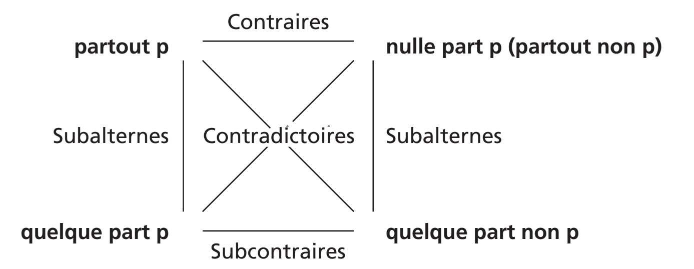
d) contradictoire

e) conséquence par conversion partielle

66.



67.



68. *Disamis* est un syllogisme de 3e figure (S-S) composé de propositions de type I A I :

Certaines décisions judiciaires sont contestables

Toutes les décisions judiciaires doivent être exécutés

Certaines décisions qui doivent être exécutées sont contestables.

On ramène ce raisonnement à la forme *Darii* en opérant une conversion simple sur la majeure, en permutant les prémisses et en opérant une conversion simple sur la conclusion :

Toutes les décisions judiciaires doivent être exécutées

Certaines décisions contestables sont des jugements

Certaines décisions contestables doivent être exécutées

69. *Baroco* est un syllogisme de 2e figure (P-P) composé de propositions de type A O O :

Tous les actes illégaux sont punissables

Certains meurtres ne sont pas punissables

Certains meurtres ne sont pas illégaux

On ramène ce raisonnement à la forme *Barbara* par un raisonnement par l'absurde :

Tous les actes illégaux sont punissables

Tous les meurtres sont illégaux (contradictoire de la conclusion du syllogisme à réduire)

Tous les meurtres sont punissables

(Si on suppose la conclusion du syllogisme en *Bocardo* fausse, on obtient, par un syllogisme en *Barbara*, la contradictoire de la mineure. On peut donc affirmer que la conclusion ne peut être fausse).

70. Syllogisme en *Darii* : Tous les mammifères sont vivipares

Certains animaux aquatiques sont des mammifères

Certains animaux aquatiques sont vivipares

Ramené par l'absurde à un syllogisme en *Camestres*

Tous les mammifères sont vivipares

Aucun animal aquatique n'est vivipare (contradictoire de la conclusion du syllogisme précédent)

Aucun animal aquatique n'est un mammifère

Lui-même ramené à un syllogisme en *Celarent* par permutation des prémisses et conversion simple de la mineure :

Aucun vivipare n'est un animal aquatique

Tous les mammifères sont vivipares

Aucun mammifère n'est un animal aquatique

71. Syllogisme en *Fesapo* :

Aucun oiseau n'est un mammifère

Tous les mammifères sont des animaux

Certains animaux ne sont pas des oiseaux

Ce syllogisme est valide pour autant qu'il existe des mammifères.

On peut ramener ce syllogisme à la forme *Ferio* en effectuant une conversion simple sur la majeure et une conversion partielle sur la mineure :

Aucun mammifère n'est un oiseau

Certains animaux sont des mammifères

Certains animaux ne sont pas des oiseaux

La validité du syllogisme en *Fesapo* découle de la validité du syllogisme en *Ferio* pour autant que l'on puisse déduire « certains animaux sont des mammifères » à partir de « tous les mammifères sont des animaux », ce qui est le cas pour autant qu'il y ait des mammifères.

72. Syllogisme en *Celarent* :

Aucun homme n'est parfait

Tous les Grecs sont des hommes

Aucun Grec n'est parfait

Le syllogisme en *Camestres* correspondant doit être tel qu'il se ramène au précédent lorsque l'on permute ses prémisses et que l'on applique une conversion simple à sa mineure ainsi qu'à sa conclusion. Ce syllogisme est donc :

Tous les Grecs sont des hommes

Aucun être parfait n'est un homme

Aucun être parfait n'est Grec.

Il s'agit d'un syllogisme de la deuxième figure.

73. Syllogisme en *Cesaro* de la 2e figure.

Ce syllogisme se rattache à la forme *Cesare* :

Aucune réalité sensible n'est immortelle

Toutes les âmes sont immortelles

Donc aucune âme n'est une réalité sensible

Ce syllogisme en *Cesare* peut être ramené à la forme *Celarent* (1ère figure) par conversion simple de la majeure :

Rien de ce qui est immortel n'est une réalité sensible

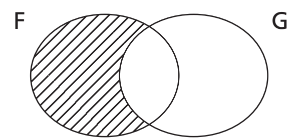
Toutes les âmes sont immortelles

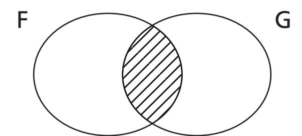
Donc aucune âme n'est une réalité sensible

La validité du syllogisme de départ peut être déduite de celle du syllogisme en *Cesare* pourvu qu'il soit possible de conclure de « aucune âme n'est une réalité sensible » que « certaines âmes ne sont pas des réalités sensibles », ce qui n'est le cas que pour autant qu'il y ait des âmes.

74. Règle des contraires : Une proposition de type A et la proposition de type E correspondante ne peuvent être vraies en même temps.

Les propositions « Tout F est G » et « Aucun F n'est G » ne peuvent être vraies en même temps.

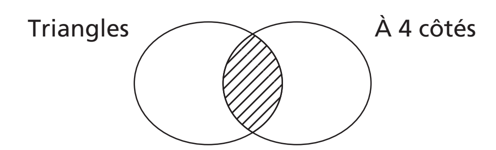




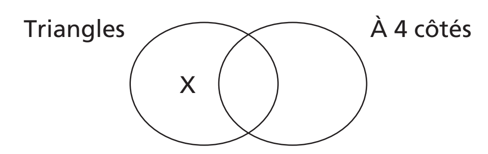
On constate que cette règle n'est valable que si l'on suppose qu'il y a des F (s'il n'y a pas de F, les deux diagrammes ne s'excluent pas nécessairement).

75. Il faut ajouter la prémisse suivante : « il y a des triangles »

On ne peut en effet passer du diagramme qui exprime qu'aucun triangle n'a quatre côtés

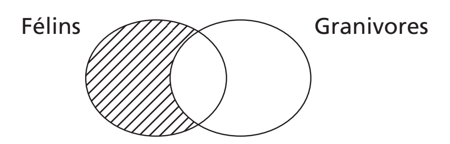


au diagramme qui exprime que certains triangles n'ont pas quatre côtés

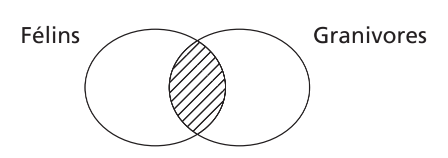


que si l'on suppose qu'il y a des triangles.

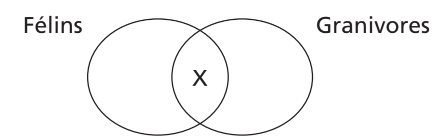
76. A : Tous les félins sont granivores



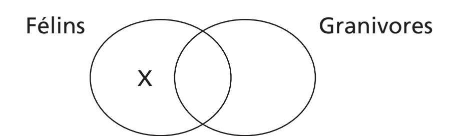
E : Aucun félin n'est un granivore



I : Certains félins sont granivores

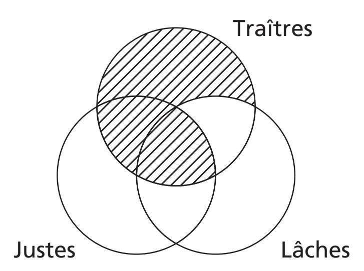


O : Certains félins ne sont pas granivores



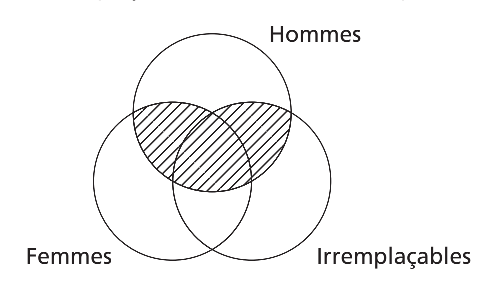
E découle de « il n'y a pas de granivore ». I est incompatible avec ce jugement.

77. a) Tout ceux qui trahissent sont des lâches ; aucun homme juste ne trahit



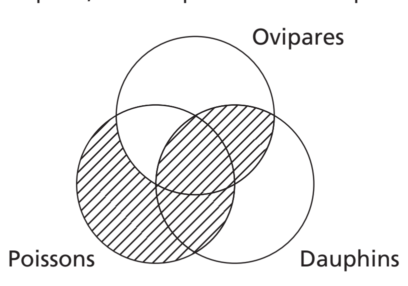
Si l'on fait l'hypothèse qu'il y a des traîtres, on peut conclure « certains lâches ne sont pas justes ».

b) Aucun homme n'est irremplaçable ; les femmes ne sont pas des hommes



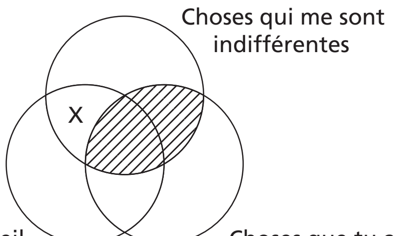
On ne peut tirer aucune conclusion de ces prémisses.

c) Aucun dauphin n'est ovipare ; tous les poissons sont ovipares



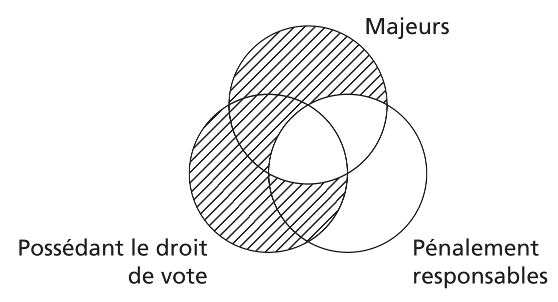
On peut conclure « aucun poisson n'est un dauphin » (ou « aucun dauphin n'est un poisson »)

d) Rien de ce que tu as écrit ne m'est indifférent ; certains textes de ce recueil me sont indifférents



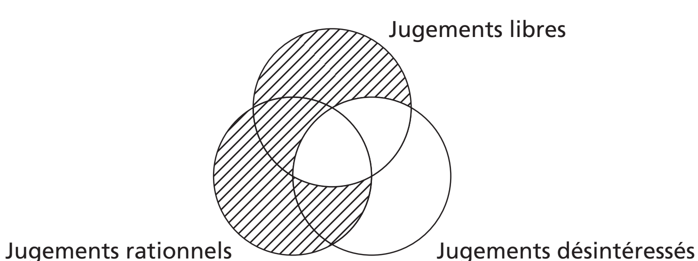
On peut conclure «certains textes de ce recueil ne sont pas de ta main ».

e) Être majeur est une condition suffisante pour être pénalement responsable. Être majeur est une condition nécessaire pour avoir le droit de vote.



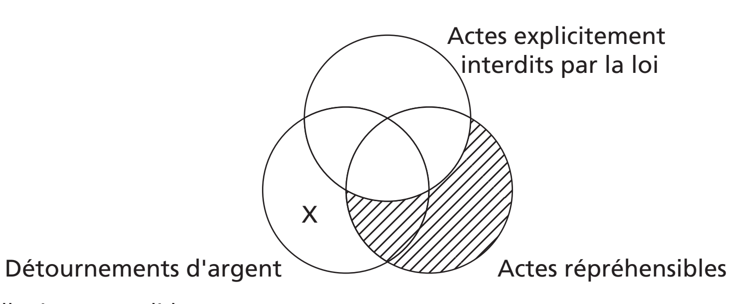
On peut conclure « tous les électeurs sont pénalement responsables ».

78. a)



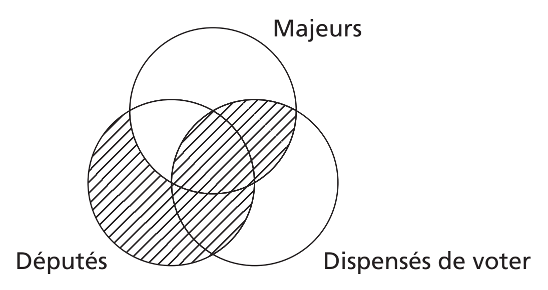
Ce raisonnement est valide pour autant que l'on ajoute la prémisse « il y a des jugements rationnels »

b)



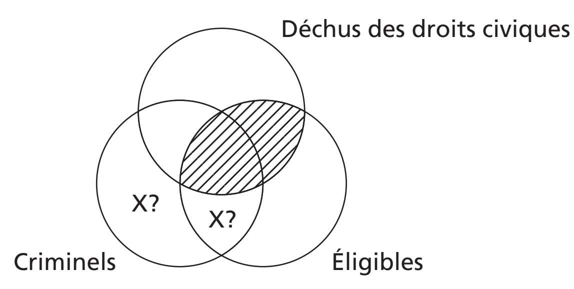
Ce syllogisme est valide

c)



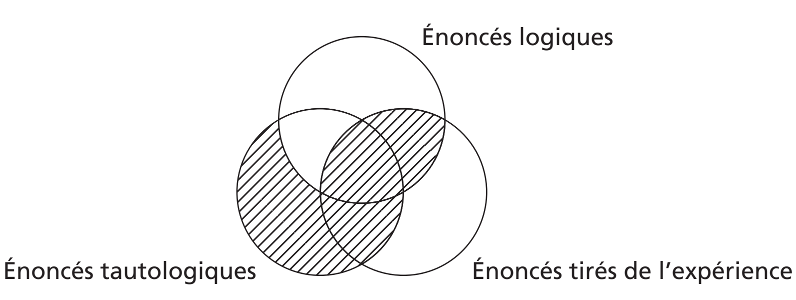
Ce syllogisme est valide.

d)



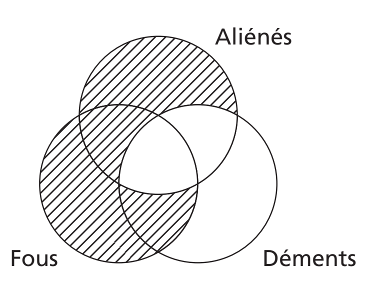
Ce syllogisme n'est pas valide (les prémisses ne permettent pas d'affirmer que la croix qui représente les criminels qui ne sont pas déchus de leur droits civiques se trouve dans l'ensemble des personnes éligibles).

e)

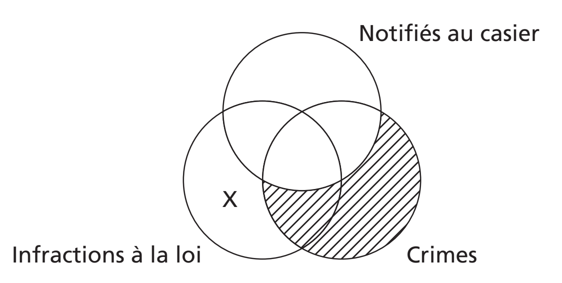


Ce raisonnement est valide pour autant que l'on ajoute la prémisse « il y a des énoncés tautologiques ».

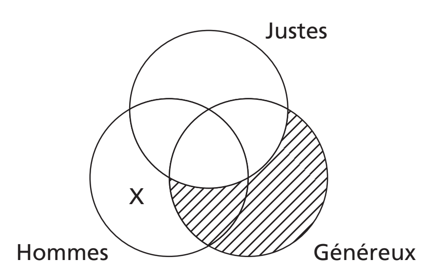
79. a) Tous les aliénés sont déments.
Tous les fous sont aliénés.
Donc, tous les fous sont déments.



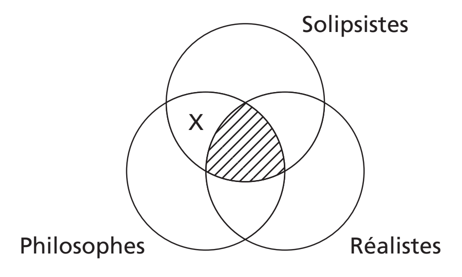
b) Certaines infractions à la loi ne sont pas notifiées dans le casier judiciaire.
Tous les crimes sont notifiés dans le casier judiciaire.
Donc certaines infractions à la loi ne sont pas des crimes.



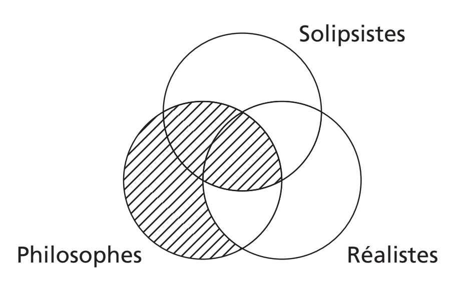
c) Qui est généreux est forcément juste
Certains hommes ne sont pas justes.
Certains hommes ne sont pas généreux.



80. On peut tirer les conclusions suivantes : « Il y a des philosophes qui ne sont pas réalistes », « il y a des solipsistes qui ne sont pas réalistes », « il y a des philosophes solipsistes qui ne sont pas réalistes ».



81. Il faut ajouter la prémisse : « Il y a des philosophes »



82. a) $f(\underline{x}) \wedge \forall x\, g(x,\underline{y})$

b) $\exists x\, [f(x,\underline{y}) \vee \forall y\, g(x,y)] \wedge f(\underline{x})$

c) $f(\underline{x}) \wedge \forall x\, [g(x,\underline{y}) \Rightarrow \exists y\, h(y,x)]$

d) $\forall x\{f(x,\underline{y}) \wedge [\exists y\, g(y,x) \Rightarrow h(x,\underline{y})]\}$

83. b,c et f. Notons que a et e sont des expressions bien formées, mais que la présence d'une variable libre a pour conséquence qu'il ne s'agit pas de propositions (vraies ou fausses).

84. a) Soit $a(x)$: x est aimable
$v(x)$: x est vrai

- $\forall x\, (a(x) \Rightarrow v(x))$ (tout ce qui est aimable est vrai)
- Contradictoire : $\exists x\, (a(x) \wedge \neg v(x))$ (il y a des choses aimables qui ne sont pas vraies)
- Contraire : $\neg\exists x\, (a(x) \wedge v(x))$ (aucune chose aimable n'est vraie)
- Subalterne : $\exists x\, (a(x) \wedge v(x))$ (il y a des choses aimables qui sont vraies)

b) Soit $v(x)$: x est vrai
$s(x)$: x est vraisemblable

- $\exists x\, (v(x) \wedge \neg s(x))$ (il y a des choses vraies qui ne sont pas vraisemblables)
- Contradictoire : $\neg\exists x\, (v(x) \wedge \neg s(x))$ ou $\forall x\, (v(x) \Rightarrow s(x))$ (il n'y a pas de choses qui soient à la fois vraies et pas vraisemblables *ou* tout ce qui est vrai est vraisemblable).
- Subcontraire : $\exists x\, (v(x) \wedge s(x))$ (il y a des choses vraies qui sont vraisemblables)
- Superalterne : $\forall x\, (v(x) \Rightarrow \neg s(x))$ (tout ce qui est vrai est non-vraisemblable)

85. Soit $a(x,y)$: x aime y

- $\forall x\, \exists y\, a(x,y)$ signifie que chacun aime quelqu'un (chaque individu aime au moins une personne, qui n'est, bien sûr, pas nécessairement la même pour chacun)
- $\exists y\, \forall x\, a(x,y)$ signifie qu'il y a quelqu'un que tout le monde aime (autrement dit, il y a un individu qui est aimé par tout le monde)
- $\forall y\, \exists x\, a(x,y)$ signifie que chacun est aimé par quelqu'un (chaque individu est aimé par au moins une personne)
- $\exists x\, \forall y\, a(x,y)$ signifie qu'il y a quelqu'un qui aime tout le monde

86. a) $j(x)$: x est juriste
$a(x)$: x est admis à l'audience
$\exists x\, (j(x) \wedge \neg a(x))$ ou $\neg\forall x (j(x) \Rightarrow a(x))$

b) (avec les mêmes notations) $\forall x\, (j(x) \Rightarrow \neg a(x))$ ou $\neg\exists x (j(x) \wedge a(x))$

c) $d(x)$: x est une décision
$r(x)$: je refuse de me prononcer sur x
$\exists x\, (d(x) \wedge r(x))$

d) (avec les mêmes notations) $\forall x\, (d(x) \Rightarrow r(x))$

e) $m(x)$: x est condamné à mort
$g(x)$: x est grâcié
$e(x)$: x est exécuté
$\forall x\, [m(x) \Rightarrow (g(x)\ W\ e(x))]$

f) $i(x)$: x est inculpé
$s(x)$: x est suspect
$\neg\exists x (s(x) \wedge i(x)) \Rightarrow \exists x (i(x) \wedge \neg s(x))$

g) $p(x)$: x apprécie le cours de psychologie
$s(x)$: x apprécie le cours de sociologie

l(x) : x apprécie le cours de logique
r(x) : x apprécie le cours de droit romain
d(x) : x apprécie le cours de droit pénal
$\exists x(p(x) \wedge s(x) \wedge \neg l(x) \wedge \neg d(x)) \wedge \forall x[(p(x) \vee d(x)) \Rightarrow (l(x) \wedge r(x))]$

h) s(x, y) : x est soumis à y
c(x) : x est citoyen
t(x) : x est une taxe
$\exists x[t(x) \wedge \forall y(c(y) \Rightarrow s(y,x))] \Rightarrow \forall x[c(x) \Rightarrow \exists y(t(y) \wedge s(x,y))]$

i) p(x,y,z) : x parle à y de z
$\exists x \forall y[\exists z\ p(z,x,y) \Rightarrow \forall t\ p(x,t,y)]$

j) d(x,y) : x dénonce y
a(x) : a est un accusé
$\exists x[a(x) \wedge \forall y(a(y) \Rightarrow d(y,x))] \Rightarrow \exists x(a(x) \wedge d(x,x))$

k) a(x,y) : a admire y
$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)]$

l) c(x) : x est un cheval
a(x) : s est un animal
t(x,y) : x est la tête de y
$[\forall x\ (c(x) \Rightarrow a(x))] \Rightarrow \forall x\ [\exists y(t(x,y) \wedge c(y)) \Rightarrow \exists z(a(z) \wedge t(x,z))]$

87. p(x) : x est philosophe
s(x) : x est spiritualiste
m(x) : x est matérialiste
$\exists x(p(x) \wedge \neg s(x) \wedge \neg m(x))$ ou $\exists x[p(x) \wedge \neg(s(x) \vee m(x))]$
Contradictoire : $\neg \exists x[p(x) \wedge \neg(s(x) \vee m(x))]$ *ou* $\forall x\ \neg[p(x) \wedge \neg(s(x) \vee m(x))]$
ou $\forall x[p(x) \Rightarrow (s(x) \vee m(x))]$
C'est-à-dire : Il n'y a personne qui est philosophe et qui n'est pas spiritualiste ou matérialiste *ou* Tout philosophe est spiritualiste ou matérialiste

88.
a) $\exists x \forall y\ a(x,y)$
b) $\forall x \forall y\ p(x,y)$
c) $\exists x\ \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow a(x,y))$
d) $\exists x\ \forall y\ (p(y,x) \Rightarrow a(x,y))$
e) $\forall x\ \exists y\ (p(y,x) \wedge a(x,y))$
f) $\forall x\ [p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)] \wedge \forall x\ p(x,x)$
g) $\exists x \exists y\ (a(x,y) \wedge a(y,x)) \wedge \forall x \forall y\ \neg(p(x,y) \wedge p(y,x))$
h) $\forall x \forall y\ (a(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))$
i) $\exists x \forall y(p(x,y) \wedge p(y,x))$

89.
a) Il y a quelqu'un qui doit de l'argent à tout le monde (il y a un débiteur universel)
b) Il y a quelqu'un à qui tout le monde doit de l'argent (il y a un créancier universel)
c) Chacun a au moins un débiteur
d) Chacun a au moins un créancier
e) Personne ne se doit de l'argent à soi-même (personne n'est son propre débiteur *ou* personne n'est son propre créancier) et personne ne doit de l'argent à son débiteur
f) Il y en a qui se doivent mutuellement de l'argent et il y en a même qui se doivent de l'argent à eux-mêmes
g) Chacun est le débiteur des créanciers de ses créanciers

90. a) Il y a quelqu'un qui est le maître à penser de tous les philosophes

b) Chaque philosophe a un maître à penser

c) Aucun philosophe n'est le maître à penser de son maître à penser et personne n'est son propre maître à penser

d) Tout maître à penser d'un maître à penser d'un philosophe est aussi un maître à penser de ce philosophe (Un maître à penser d'un philosophe est aussi un maître à penser de ceux dont ce philosophe est un maître à penser)

91. a) Les caisses de l'état sont vide mais le gouvernement ne démissionne pas

b) Si tout le monde paie ses impôts, les caisses de l'état ne seront pas vides

c) Le gouvernement démissionnera si et seulement si personne ne paie ses impôts

d) Si quelqu'un ne paie pas ses impôts, chacun se méfiera de tout le monde

92. a) Si tout le monde ne travaille pas efficacement, la société fera des pertes et licenciera du personnel

b) Si la société licencie du personnel, c'est qu'il y a des gens qui ne travaillent pas efficacement

c) Il ne s'agit pas d'une formule bien formée

d) Il n'y aura personne qui ne travaillera pas efficacement si et seulement si il y a quelqu'un à qui tout le monde obéit (Tout le monde travaillera efficacement si et seulement si il y a un chef à qui tout le monde obéit)

e) Chacun obéit à quelqu'un

f) Il y a quelqu'un qui obéit à tout le monde et qui travaille efficacement

g) Il s'agit d'une formule ouverte

93. f(x,y) : x flatte y

m(x,y) : x méprise y

prémisses :

$\exists x \forall y (m(y,x) \Rightarrow f(x,y))$

$\forall x \forall y\ m(x,y)$

conclusion :

$\exists x \forall y\ f(x,y)$

94. Exemple d'interprétation qui est un modèle de la formule :

Domaine d'interprétation : ensemble des nombres naturels strictement inférieurs à 10

I(a) : 4

I(b) : 3

I(p) : ≥ (p(x,y) est une fonction qui associe V au couple (x,y) ssi x est plus grand ou égal à y)

Cette interprétation rend vraie la formule $p(a,b) \wedge \exists x \forall y\ p(x,y)$ car $4 \geq 3$ et il y a bien un nombre (9) qui est plus grand ou égal à tous les éléments du domaine.

Exemple d'interprétation qui n'est pas un modèle de la formule :

Domaine d'interprétation : ensemble des individus humains

I(a) : Léopold III

I(b) : Albert II

I(p) : « est le père de » (p (x,y) est une fonction qui associe V au couple (x,y) ssi x est le père de y)

Cette interprétation n'est pas un modèle de la formule $p(a,b) \wedge \exists x \forall y\ p(x,y)$ car, si $p(a,b)$ est vrai - puisque Léopold III est le père d'Albert II- il est en revanche faux qu'il existe un individu humain x qui soit le père de tous les individus humains.

95. En considérant que le domaine d'interprétation est l'ensemble des continents et en utilisant les notations suivantes :

a : Asie ; b : Afrique ; c : Amérique du Nord ; d : Amérique du Sud ; e : Europe ; f : Océanie

s(x,y) : x a une superficie supérieure(ou égale) à y

p(x,y) : x a une population supérieure (ou égale) à y

a) $\forall x\ p(a,x)$
b) $p(d,c) \wedge s(c,d)$
c) $\forall x (s(b,x) \Rightarrow p(b,x))$
d) $\exists x (p(x,e) \wedge s(e,x))$
e) $\exists x (s(x,e) \wedge p(e,x))$
f) $\exists x \forall y (s(y,x) \wedge p(y,x))$
g) $\forall x \forall y (s(x,y) \Leftrightarrow p(x,y))$

Une interprétation conforme à la réalité géographique actuelle rend a,b,c,e, et f vraies et d et g fausses.

Une interprétation conforme à la réalité géographique de 1900 rend a, e et f vraies et b,c,d et g fausses.

96. a) ligne 3 : non respect de la règle qui exige de choisir une variable inédite pour instancier l'existentielle.

Le tableau correct serait :

$$\exists y \exists x\ p(x,y),\ \forall x\ \neg p(x,x)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ \neg p(x,x),\ \exists x\ p(x,a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ \neg p(x,x),\ p(b,a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ \neg p(x,x),\ p(b,a),\ \neg p(a,a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ \neg p(x,x),\ p(b,a),\ \neg p(a,a),\ \neg p(b,b)$$

Le tableau est ouvert.

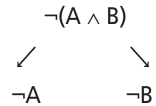
b) ligne 3 et ligne 5 : non respect de la règle qui exige de choisir une variable inédite pour instancier l'existentielle.

Le tableau correct serait :

$$\exists x\ \exists y\ p(x,y),\ \exists x\ \exists y\ \neg p(x,y)$$
$$\downarrow$$
$$\exists y\ p(a,y),\ \exists x\ \exists y\ \neg p(x,y)$$
$$\downarrow$$
$$\exists y\ p(a,y),\ \exists y\ \neg p(b,y)$$
$$\downarrow$$
$$p(a,c),\ \exists y\ \neg p(b,y)$$
$$\downarrow$$
$$p(a,c),\ \neg p(b,d)$$

Le tableau est ouvert.

c) ligne 2 : application erronée de la règle



ligne 7 (partie droite du tableau) : non respect de la règle qui exige de choisir une variable inédite pour instancier l'universelle négative.

Le tableau correct serait :

$\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg(\forall x\, p(x) \wedge \forall x \exists y\, r(x, y))$

- $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg \forall x\, p(x)$
  - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg p(a)$
  - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg p(a),\ \exists y\,(p(a) \vee r(a, y))$
  - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg p(a),\ p(a) \vee r(a, b)$
    - $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg p(a),\ p(a)$
      - X
    - $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg p(a),\ r(a, b)$
      - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ r(a, b),\ \neg p(a),\ \exists y(p(b) \vee r(b, y))$
      - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ r(a, b),\ \neg p(a),\ p(b) \vee r(b, c),$
      - etc.
- $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg \forall x \exists y\, r(x, y)$
  - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg \exists y\, r(c, y)$
  - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg \exists y\, r(c, y),\ \exists y\,(p(c) \vee r(c, y))$
  - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg \exists y\, r(c, y),\ p(c) \vee r(c, d)$
  - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg \exists y\, r(c, y),\ p(c) \vee r(c, d),\ \neg r(c, d)$
    - $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg \exists y\, r(c, y),\ p(c),\ \neg r(c, d)$
      - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg \exists y\, r(c, y),\ p(c),\ \neg r(c, d),\ \exists y(p(d) \vee r(d, y))$
      - → $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x\, y)),\ \neg \exists y\, r(c, y),\ p(c),\ \neg r(c, d),\ p(d) \vee r(d, e)$
      - etc.
    - $\forall x \exists y\,(p(x) \vee r(x, y)),\ \neg \exists y\, r(c, y),\ r(c, d),\ \neg r(c, d)$
      - X

Le tableau est infini. On n'en finira jamais d'instancier les universelles avec les nouvelles constantes que l'instanciation des existentielles ne cesse de faire apparaître.

97. a) $\forall y\ [\forall x\ p(x) \Rightarrow p(y)]$

Cherchons les modèles de la négation de cette formule

$$\neg\forall y\ [\forall x\ p(x) \Rightarrow p(y)]$$
$$\downarrow$$
$$\neg(\forall x\ p(x) \Rightarrow p(a))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ p(x),\ \neg p(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ p(x),\ p(a),\ \neg p(a)$$
$$\text{X}$$

La formule de départ est bien valide.

b) $\forall y\ [p(y) \Rightarrow \forall x\ p(x)]$

Cherchons les modèles de la négation de cette formule

$$\neg\forall y\ [p(y) \Rightarrow \forall x\ p(x)]$$
$$\downarrow$$
$$\neg(p(a) \Rightarrow \forall x\ p(x))$$
$$\downarrow$$
$$p(a),\ \neg\forall x\ p(x)$$
$$\downarrow$$
$$p(a),\ \neg p(b)$$
$$\text{O}$$

La formule de départ n'est donc pas valide.

Remarquons que, dans un domaine réduit à un seul élément, le tableau sémantique se fermerait et la formule de départ serait donc valide.

c) $\exists y\ [\forall x\ p(x) \Rightarrow p(y)]$

Cherchons les modèles de la négation de cette formule.

$$\neg\exists y\ [\forall x\ p(x) \Rightarrow p(y)]$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists y\ [\forall x\ p(x) \Rightarrow p(y)],\ \neg(\forall x\ p(x) \Rightarrow p(a))$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists y\ [\forall x\ p(x) \Rightarrow p(y)],\ \forall x\ p(x),\ \neg p(a)$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists y\ [\forall x\ p(x) \Rightarrow p(y)],\ \forall x\ p(x),\ \neg p(a),\ p(a)$$
$$\text{X}$$

La formule de départ est valide.

d) $\exists y\ [p(y) \Rightarrow \forall x\ p(x)]$

Cherchons les modèles de la négation de cette formule.

$$\neg\exists y\ [p(y) \Rightarrow \forall x\ p(x)]$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists y\ [p(y) \Rightarrow \forall x\ p(x)],\ \neg(p(a) \Rightarrow \forall x\ p(x))$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists y\ [p(y) \Rightarrow \forall x\ p(x)],\ p(a),\ \neg\forall x\ p(x)$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists y\ [p(y) \Rightarrow \forall x\ p(x)],\ p(a),\ \neg p(b)$$
$$\downarrow$$

$\neg\exists y\,[p(y) \Rightarrow \forall x\, p(x)],\ \neg(p(b) \Rightarrow \forall x\, p(x)),\ p(a),\ \neg p(b)$

$\downarrow$

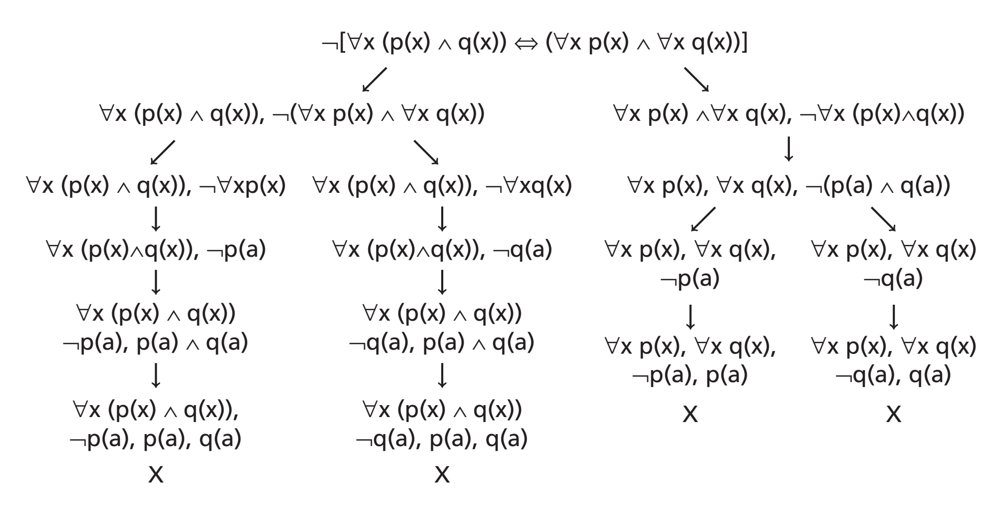
$\neg\exists y\,[p(y) \Rightarrow \forall x\, p(x)],\ p(b),\ \neg\forall x\, p(x),\ p(a),\ \neg p(b)$

X

La formule de départ est valide

e) $\forall x\,(p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow (\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x))$

Cherchons les modèles de la négation de cette formule.



La formule de départ est bien valide.

f) $\exists x\,(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (\exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x))$

De manière analogue au cas précédent, on démontre que la négation de cette formule ne possède pas de modèle, et que la formule de départ est donc valide.

g) $\exists x\,(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x))$

Cherchons les modèles de la négation de cette formule

$\neg[\exists x\,(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x))]$

$\downarrow$

$\exists x\,(p(x) \wedge q(x)),\ \neg(\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x))$

↙	↘
$\exists x\,(p(x) \wedge q(x)),\ \neg\exists x\, p(x)$	$\exists x\,(p(x) \wedge q(x)),\ \neg\exists x\, q(x)$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\neg\exists x\, p(x),\ p(a) \wedge q(a),$	$\neg\exists x\, q(x),\ p(a) \wedge q(a),$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\neg\exists x\, p(x),\ p(a),\ q(a)$	$\neg\exists x\, q(x),\ p(a),\ q(a)$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\neg\exists x\, p(x),\ p(a),\ q(a),\ \neg p(a)$	$\neg\exists x\, q(x),\ p(a),\ q(a),\ \neg q(a)$
X	X

La formule de départ est valide.

h) $(\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)) \Rightarrow \exists x\, (p(x) \wedge q(x))$

Cherchons les modèles de la négation de cette formule

$$\neg[(\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)) \Rightarrow \exists x\, (p(x) \wedge q(x))]$$
$$\downarrow$$
$$\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x),\ \neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\exists x\, p(x),\ \exists x\, q(x),\ \neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\exists x\, q(x),\ \neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x)),\ p(a)$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ q(b)$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ q(b),\ \neg(p(a) \wedge q(a)),\ \neg(p(b) \wedge q(b))$$

$\swarrow$ $\neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ q(b),\ \neg p(a),\ \neg(p(b) \wedge q(b))$

- $\swarrow$ $\neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ q(b),\ \neg p(a),\ \neg p(b)$ — X
- $\searrow$ $\neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ q(b),\ \neg p(a),\ \neg q(b)$ — X

$\searrow$ $\neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ q(b),\ \neg q(a),\ \neg(p(b) \wedge q(b))$

- $\swarrow$ $\neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ q(b),\ \neg q(a),\ \neg p(b)$ — O
- $\searrow$ $\neg\exists x\, (p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ q(b),\ \neg q(a),\ \neg q(b)$ — X

La formule de départ n'est pas valide.

i) $\forall x\, (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x))$: formule non valide

j) $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Rightarrow (\forall x\, (p(x) \vee q(x)))$: formule valide

k) $\exists x \forall y\, r(x,y) \vee \exists x \exists y\, \neg r(x,y)$

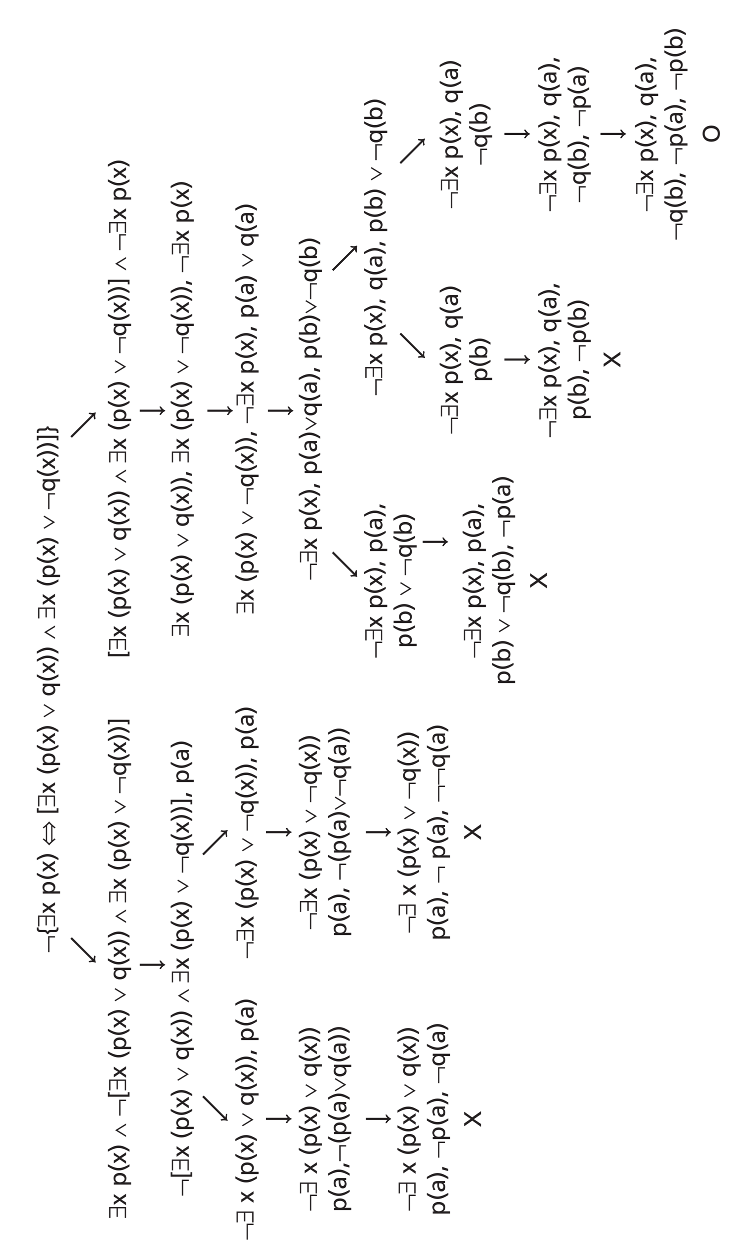
Cherchons les modèles de la négation de cette formule

$$\neg[\exists x \forall y\, r(x,y) \vee \exists x \exists y\, \neg r(x,y)]$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x \forall y\, r(x,y), \neg\exists x \exists y\, \neg r(x,y)$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x \forall y\, r(x,y),\ \neg\exists x \exists y\, \neg r(x,y),\ \neg\forall y\, r(a,y)$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x \forall y\, r(x,y),\ \neg\exists x \exists y\, \neg r(x,y),\ \neg r(a,b)$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x \forall y\, r(x,y),\ \neg\exists x \exists y\, \neg r(x,y),\ \neg r(a,b),\ \neg\exists y \neg r(a,y)$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x \forall y\, r(x,y),\ \neg\exists x \exists y\, \neg r(x,y),\ \neg r(a,b),\ \neg\exists y \neg r(a,y),\ \neg\neg r(a,b)$$
$$\text{X}$$

La formule de départ est valide.

l) ∀x p(x) ⇔ [∀x (p(x) ∨ q(x)) ∧ ∀x (p(x) ∨ ¬q(x))] : formule valide

m) ∃x p(x) ⇔ [∃x (p(x) ∨ q(x)) ∧ ∃x (p(x) ∨ ¬q(x))]
Cherchons les modèles de la négation de cette formule



Le tableau est ouvert. La formule de départ n'est donc pas valide.

Notons que la partie gauche du tableau, qui correspond à la négation de l'implication ∃x p(x) ⇒ [∃x (p(x) ∨ q(x)) ∧ ∃x (p(x) ∨ ¬q(x))] est, quant à elle, fermée. L'implication dans ce sens est donc valide.

98. Dans le cadre du calcul des propositions :

Si l'on adopte les notations suivantes

h : Jean est heureux

b : Jean part aux Bahamas

l : Jean a du temps libre

a : Jean a de l'argent

p : Il faut de l'argent pour partir aux Bahamas,

le raisonnement s'écrit : $h \Rightarrow b$

$l \wedge \neg a$

p

donc $\neg h$

Il n'est manifestement pas possible de démontrer la validité de ce raisonnement.

Dans le cadre du calcul des prédicats :

Si l'on adopte les notations suivantes

h(x) : x est heureux

b(x) : x part aux Bahamas

l(x) : x a du temps libre

a(x) : x a de l'argent

j : Jean,

le raisonnement s'écrit : $h(j) \Rightarrow b(j)$

$l(j) \wedge \neg a(j)$

$\forall x(b(x) \Rightarrow a(x))$ (cette expression du calcul des prédicats fait apparaître la structure de la proposition, qui restait « invisible » dans le cadre du calcul des propositions)

donc $\neg h(j)$

On démontre très facilement la validité de ce raisonnement par la méthode des tableaux sémantiques en prouvant que la proposition suivante ne possède pas de modèle :

$\neg\{[h(j) \Rightarrow b(j)] \wedge [l(j) \wedge \neg a(j)] \wedge [\forall x(b(x) \Rightarrow a(x))] \Rightarrow \neg h(j)\}$

$[h(j) \Rightarrow b(j)] \wedge [l(j) \wedge \neg a(j)] \wedge [\forall x(b(x) \Rightarrow a(x))], h(j)$

↓

$h(j) \Rightarrow b(j), l(j) \wedge \neg a(j), \forall x(b(x) \Rightarrow a(x)), h(j)$

↓

$h(j) \Rightarrow b(j), l(j), \neg a(j), \forall x(b(x) \Rightarrow a(x)), h(j)$

↙ ↘

$\neg h(j), l(j), \neg a(j), \forall x(b(x) \Rightarrow a(x)), h(j)$ — X

$b(j), l(j), \neg a(j), \forall x(b(x) \Rightarrow a(x)), h(j)$

↓

$b(j), l(j), \neg a(j), b(j) \Rightarrow a(j), h(j)$

↙ ↘

$b(j), l(j), \neg a(j), \neg b(j), h(j)$ — X

$b(j), l(j), \neg a(j), a(j), h(j)$ — X

99. Il faut montrer que la formule suivante est valide : $[\forall x \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))] \Rightarrow \forall x\ \neg p(x,x)$
Pour cela, on recherche un modèle pour la négation de cette formule.

$$\neg\{[\forall x \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))] \Rightarrow \forall x\ \neg p(x,x)\}$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)),\ \neg\forall x\ \neg p(x,x)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)),\ \neg\forall x\ \neg p(x,x),\ p(a,a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)),\ \neg\forall x\ \neg p(x,x),\ p(a,a),\ \forall y\ (p(a,y) \Rightarrow \neg p(y,a))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)),\ \neg\forall x\ \neg p(x,x),\ p(a,a),\ p(a,a) \Rightarrow \neg p(a,a)$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$\forall x \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)),$ $\neg\forall x\ \neg p(x,x),\ p(a,a),\ \neg p(a,a)$	$\forall x \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)),$ $\neg\forall x\ \neg p(x,x),\ p(a,a),\ \neg p(a,a)$
X	X

100. Pour prouver que A et O sont contradictoires, nous allons montrer qu'aucune des deux formules suivantes ne possède de modèle
$\neg\{[\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))] \Rightarrow [\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)]\}$
$\neg\{[\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))] \Rightarrow [\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))]\}$.

$$\neg\{[\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))] \Rightarrow [\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))]\}$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ p(a) \wedge \neg q(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ p(a),\ \neg q(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ p(a) \Rightarrow q(a),\ p(a),\ \neg q(a)$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg p(a),\ p(a),\ \neg q(a)$	$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ q(a),\ p(a),\ \neg q(a)$
X	X

$$\neg\{[\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))] \Rightarrow [\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))]\}$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),\ \neg\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),\ \neg(p(a) \Rightarrow q(a))$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),\ \neg(p(a) \wedge \neg q(a)),\ p(a),\ \neg q(a)$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),\ \neg p(a),\ p(a),\ \neg q(a)$	$\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),\ \neg\neg q(a),\ p(a),\ \neg q(a)$
X	X

101. Il faut montrer que le schéma $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x(p(x)) \wedge \neg\exists x(p(x) \wedge q(x))$ ne possède pas de modèle :

$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x(p(x)) \wedge \neg\exists x(p(x) \wedge q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \exists x(p(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ p(a) \Rightarrow q(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ p(a) \Rightarrow q(a),\ \neg(p(a) \wedge q(a))$$

$\swarrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ p(a) \Rightarrow q(a),\ \neg p(a)$

X

$\searrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ p(a) \Rightarrow q(a),\ \neg q(a)$

- $\swarrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ \neg p(a),\ \neg q(a)$

  X

- $\searrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a),\ q(a),\ \neg q(a)$

  X

Sans la condition d'existence, on obtient :

$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \neg\exists x(p(x) \wedge q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a) \Rightarrow q(a),$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a) \Rightarrow q(a),\ \neg(p(a) \wedge q(a))$$

$\swarrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a) \Rightarrow q(a),\ \neg p(a)$

- $\swarrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ \neg p(a),\ \neg p(a)$

  O

- $\searrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ q(a),\ \neg p(a)$

  O

$\searrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ p(a) \Rightarrow q(a),\ \neg q(a)$

- $\swarrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ \neg p(a),\ \neg q(a)$

  O

- $\searrow$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ q(a),\ \neg q(a)$

  X

La négation de la formule de départ donne lieu à un tableau ouvert. La formule de départ n'est donc pas valide.

102. Montrer que, si A est vraie, I est vraie, pour autant que la condition d'existence soit satisfaite, c'est montrer que le schéma $[\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x(p(x))] \Rightarrow \exists x(p(x) \wedge q(x))$ est valide, ou encore, que sa négation $\neg\{[\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x(p(x))] \Rightarrow \exists x(p(x) \wedge q(x))\}$ ne possède pas de modèle. Cette dernière formule est en fait équivalente à celle qui a été traitée dans l'exercice précédent. Dès la deuxième ligne, le tableau sémantique qu'il faudrait faire ici est identique à celui de l'exercice précédent. Les conclusions demandées (y compris à propos de la nécessité de la condition d'existence) peuvent donc être tirées du tableau de l'exercice précédent.

Montrer que, si E est vraie, O l'est aussi, pour autant que la condition d'existence soit satisfaite, c'est montrer que le schéma $[\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)) \wedge \exists x\ p(x)] \Rightarrow \exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$ est valide, ou encore que sa négation $\neg\{[\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)) \wedge \exists x\ p(x)] \Rightarrow \exists x(p(x) \wedge \neg q(x))\}$ ne possède pas de modèle

$$\neg\{[\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)) \wedge \exists x\ p(x)] \Rightarrow \exists x(p(x) \wedge \neg q(x))\}$$
$$\downarrow$$
$$[\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)) \wedge \exists x\ p(x)],\ \neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ \exists x\ p(x),\ \neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ \exists x\ p(x),\ \neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),\ p(a)$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x(p(x) \wedge q(x),\ \neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),\ p(a),\ \neg(p(a) \wedge q(a))$$
$$\downarrow$$
$$\neg\exists x(p(x) \wedge q(x),\ \neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),\ p(a),\ \neg(p(a) \wedge q(a)),\ \neg(p(a) \wedge \neg q(a))$$

$\swarrow$

$\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),$
$p(a),\ \neg p(a),\ \neg(p(a) \wedge \neg q(a))$

X

$\searrow$

$\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),\ \neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),$
$p(a),\ \neg q(a),\ \neg(p(a) \wedge \neg q(a))$

$\swarrow$

$\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),$
$\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),$
$p(a),\ \neg q(a),\ \neg p(a)$

X

$\searrow$

$\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)),$
$\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)),$
$p(a),\ \neg q(a),\ \neg\neg q(a)$

X

La règle des subalternes appliquée aux propositions de type E et O est donc bien valide. On démontrera sans difficulté (en s'inspirant, par exemple, du cas très semblable traité dans l'exercice *101*) que la condition d'existence est bien nécessaire.

103. Il s'agit de montrer que le raisonnement suivant est valide :

Prémisses : $\neg\exists x(g(x) \wedge h(x))$
$\exists x(f(x) \wedge g(x))$

Conclusion : $\exists x\ (f(x) \wedge \neg h(x))$

Pour cela, on va montrer que $\neg\{[\neg\exists x(g(x)\wedge h(x)) \wedge \exists x(f(x)\wedge g(x))]\Rightarrow\exists x\,(f(x)\wedge\neg h(x))\}$ n'a pas de modèle.

$$\neg\{[\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)) \wedge \exists x(f(x) \wedge g(x))] \Rightarrow \exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x))\}$$

$$\downarrow$$

$$[\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)) \wedge \exists x(f(x) \wedge g(x))],\ \neg\exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x))$$

$$\downarrow$$

$$\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)),\ \exists x(f(x) \wedge g(x)),\ \neg\exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x))$$

$$\downarrow$$

$$\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)),\ \neg\exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x)),\ f(a) \wedge g(a)$$

$$\downarrow$$

$$\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)),\ \neg\exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x)),\ f(a),\ g(a),\ \neg(g(a) \wedge h(a))$$

$$\downarrow$$

$$\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)),\ \neg\exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x)),\ f(a),\ g(a),\ \neg(g(a) \wedge h(a)),\ \neg(f(a) \wedge \neg h(a))$$

$\swarrow$ $\searrow$

Branche gauche :

$$\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)),\ \neg\exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x)),\ f(a),\ g(a),\ \neg g(a),\ \neg(f(a) \wedge \neg h(a))$$

X

Branche droite :

$$\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)),\ \neg\exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x)),\ f(a),\ g(a),\ \neg h(a),\ \neg(f(a) \wedge \neg h(a))$$

$\swarrow$ $\searrow$

$$\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)),\ \neg\exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x)),\ f(a),\ g(a),\ \neg h(a),\ \neg f(a)$$

X

$$\neg\exists x(g(x) \wedge h(x)),\ \neg\exists x\,(f(x) \wedge \neg h(x)),\ f(a),\ g(a),\ \neg h(a),\ \neg\neg h(a)$$

X

Le syllogisme en Ferio est donc bien valide.

104. a) On note

$d(x)$: x est un jugement désintéressé

$l(x)$: x est un jugement libre

$r(x)$: x est un jugement rationnel

Le raisonnement s'écrit :

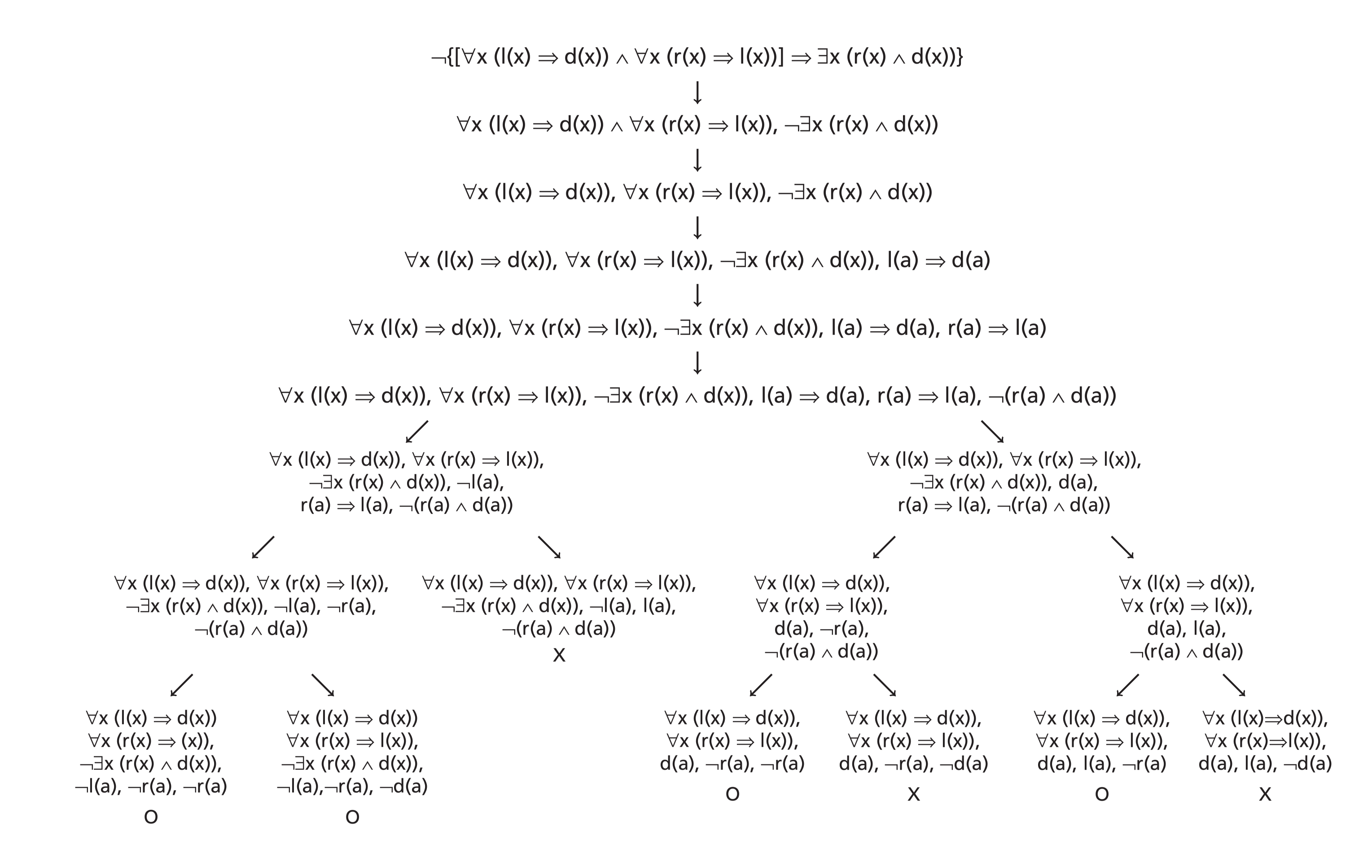
Prémisses: $\forall x\,(l(x)\Rightarrow d(x))$

$\forall x\,(r(x)\Rightarrow l(x))$

Conclusion : $\exists x\,(r(x)\wedge d(x))$

On peut l'exprimer par la formule $[\forall x\,(l(x)\Rightarrow d(x)) \wedge \forall x\,(r(x)\Rightarrow l(x))] \Rightarrow\exists x\,(r(x) \wedge d(x))$

On étudie sa validité en cherchant un modèle pour la négation de cette formule :


¬{[∀x (l(x) ⇒ d(x)) ∧ ∀x (r(x) ⇒ l(x))] ⇒ ∃x (r(x) ∧ d(x))}
∀x (l(x) ⇒ d(x)) ∧ ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x))
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x))
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x)), l(a) ⇒ d(a)
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x)), l(a) ⇒ d(a), r(a) ⇒ l(a)
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x)), l(a) ⇒ d(a), r(a) ⇒ l(a), ¬(r(a) ∧ d(a))
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x)), ¬l(a), r(a) ⇒ l(a), ¬(r(a) ∧ d(a))
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x)), d(a), r(a) ⇒ l(a), ¬(r(a) ∧ d(a))
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x)), ¬l(a), ¬r(a), ¬(r(a) ∧ d(a))
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x)), ¬l(a), l(a), ¬(r(a) ∧ d(a))
X
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), d(a), ¬r(a), ¬(r(a) ∧ d(a))
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), d(a), l(a), ¬(r(a) ∧ d(a))
∀x (l(x) ⇒ d(x)) ∀x (r(x) ⇒ (x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x)), ¬l(a), ¬r(a), ¬r(a)
O
∀x (l(x) ⇒ d(x)) ∀x (r(x) ⇒ l(x)), ¬∃x (r(x) ∧ d(x)), ¬l(a),¬r(a), ¬d(a)
O
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), d(a), ¬r(a), ¬r(a)
O
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), d(a), ¬r(a), ¬d(a)
X
∀x (l(x) ⇒ d(x)), ∀x (r(x) ⇒ l(x)), d(a), l(a), ¬r(a)
O
∀x (l(x)⇒d(x)), ∀x (r(x)⇒l(x)), d(a), l(a), ¬d(a)
X

Le tableau est ouvert. Le raisonnement proposé n'est donc pas valide. Remarquons cependant que, si on ajoutait l'hypothèse supplémentaire « il y a des jugements rationnels », le tableau se fermerait et le raisonnement de départ serait valide.

b) On note

$i(x)$: x est un acte explicitement interdit par la loi

$r(x)$: x est un acte répréhensible

$d(x)$: x est un détournement d'argent

Le raisonnement s'écrit :

Prémisses: $\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x))$

$\exists x\ (d(x) \wedge \neg i(x))$

Conclusion : $\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x))$

On peut l'exprimer par la formule $[\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)) \wedge \exists x\ (d(x) \wedge \neg i(x))] \Rightarrow \exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x))$

On étudie sa validité en cherchant un modèle pour la négation de cette formule :

$$\neg\{[\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)) \wedge \exists x\ (d(x) \wedge \neg i(x))] \Rightarrow \exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x))\}$$

$$\downarrow$$

$$[\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)) \wedge \exists x\ (d(x) \wedge \neg i(x))],\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)),\ \exists x\ (d(x) \wedge \neg i(x)),\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)),\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x)),\ (d(a) \wedge \neg i(a))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)),\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x)),\ d(a),\ \neg i(a)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)),\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x)),\ d(a),\ \neg i(a),\ r(a) \Rightarrow i(a)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)),\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x)),\ d(a),\ \neg i(a),\ r(a) \Rightarrow i(a),\ \neg(d(a) \wedge \neg r(a))$$

$\swarrow$ (branche gauche)

$$\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)),\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x)),\ d(a),\ \neg i(a),\ \neg r(a),\ \neg(d(a) \wedge \neg r(a))$$

$\swarrow$

$$\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)),\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x)),\ d(a),\ \neg i(a),\ \neg r(a),\ \neg d(a)$$

X

$\searrow$

$$\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)),\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x)),\ d(a),\ \neg i(a),\ \neg r(a),\ \neg\neg r(a)$$

X

$\searrow$ (branche droite)

$$\forall x\ (r(x) \Rightarrow i(x)),\ \neg\exists x\ (d(x) \wedge \neg r(x)),\ d(a),\ \neg i(a),\ i(a),\ \neg(d(a) \wedge \neg r(a))$$

X

Le raisonnement proposé est valide.

d) On note

$d(x)$: x est déchu de ses droits civiques

$e(x)$: x est éligible

$c(x)$: x est criminel

Le raisonnement s'écrit :

Prémisses: $\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x))$
$\exists x\ (c(x) \wedge \neg d(x))$

Conclusion : $\exists x\ (c(x) \wedge e(x))$

On peut l'exprimer par la formule $[\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)) \wedge \exists x\ (c(x) \wedge \neg d(x))] \Rightarrow \exists x\ (c(x) \wedge e(x))$

On étudie sa validité en cherchant un modèle pour la négation de cette formule :

$$\neg\{[\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)) \wedge \exists x\ (c(x) \wedge \neg d(x))] \Rightarrow \exists x\ (c(x) \wedge e(x))\}$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)) \wedge \exists x\ (c(x) \wedge \neg d(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \exists x\ (c(x) \wedge \neg d(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a) \wedge \neg d(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a),\ \neg d(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a),\ \neg d(a),\ d(a) \Rightarrow \neg e(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a),\ \neg d(a),\ d(a) \Rightarrow \neg e(a),\ \neg(c(a) \wedge e(a))$$

↙ $\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a),\ \neg d(a),\ \neg d(a),\ \neg(c(a) \wedge e(a))$

↘ $\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a),\ \neg d(a), e(a),\ \neg(c(a) \wedge e(a))$

$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a),\ \neg d(a),\ \neg c(a)$	$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a),\ \neg d(a),\ \neg e(a)$	$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a),\ \neg d(a),\ e(a),\ \neg c(a)$	$\forall x\ (d(x) \Rightarrow \neg e(x)),\ \neg\exists x\ (c(x) \wedge e(x)),\ c(a),\ \neg d(a),\ e(a), \neg e(a)$
X	O	X	X

Le raisonnement proposé n'est pas valide.

105. a) On note

$c(x,y)$: x commente les idées de y

Le raisonnement s'écrit :

Prémisse : $\exists x \forall y\ \neg c(x,y)$

Conclusion : $\neg\exists x \forall y\ c(y,x)$

On peut exprimer ce raisonnement par la formule $\exists x \forall y\ \neg c(x,y) \Rightarrow \neg\exists x \forall y\ c(y,x)$.

On étudie sa validité en cherchant un modèle pour la négation de cette formule :

$$\neg[\exists x \forall y\ \neg c(x,y) \Rightarrow \neg\exists x \forall y\ c(y,x)]$$
$$\downarrow$$
$$\exists x \forall y\ \neg c(x,y)\ ,\ \neg\neg\exists x \forall y\ c(y,x)$$
$$\downarrow$$

$$\exists x \forall y\, \neg c(x,y)\ ,\ \exists x \forall y\, c(y,x)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, \neg c(a,y)\ ,\ \exists x \forall y\, c(y,x)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, \neg c(a,y)\ ,\ \forall y\, c(y,b)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, \neg c(a,y),\ \forall y\, c(y,b),\ \neg c(a,b)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, \neg c(a,y),\ \forall y\, c(y,b),\ \neg c(a,b),\ c(a,b)$$
$$\text{X}$$

La négation de la formule de départ ne possède pas de modèle. La formule de départ est bien valide.

b) On note

a(x,y) : x aime y

m(x,y) : x fait du mal à y

Le raisonnement s'écrit :

Prémisses : $\exists x \forall y\, (m(y,x) \Rightarrow a(x,y))$

$\forall x \forall y\, m(x,y)$

Conclusion : $\exists x \forall y\, a(x,y)$

On peut l'exprimer par la formule $[\exists x \forall y\, (m(y,x) \Rightarrow a(x,y)) \wedge \forall x \forall y\, m(x,y)] \Rightarrow \exists x \forall y\, a(x,y)$. On étudie sa validité en cherchant un modèle pour la négation de cette formule :

$$\neg\{[\exists x \forall y\, (m(y,x) \Rightarrow a(x,y)) \wedge \forall x \forall y\, m(x,y)] \Rightarrow \exists x \forall y\, a(x,y)\}$$
$$\downarrow$$
$$[\exists x \forall y\, (m(y,x) \Rightarrow a(x,y)) \wedge \forall x \forall y\, m(x,y)],\ \neg \exists x \forall y\, a(x,y)$$
$$\downarrow$$
$$\exists x \forall y\, (m(y,x) \Rightarrow a(x,y)),\ \forall x \forall y\, m(x,y),\ \neg \exists x \forall y\, a(x,y)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, (m(y,a) \Rightarrow a(a,y)),\ \forall x \forall y\, m(x,y),\ \neg \exists x \forall y\, a(x,y)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, (m(y,a) \Rightarrow a(a,y)),\ \forall x \forall y\, m(x,y),\ \neg \forall y\, a(a,y)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, (m(y,a) \Rightarrow a(a,y)),\ \forall x \forall y\, m(x,y),\ \neg a(a,b)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, (m(y,a) \Rightarrow a(a,y)),\ \forall x \forall y\, m(x,y),\ m(b,a) \Rightarrow a(a,b),\ \neg a(a,b)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, (m(y,a) \Rightarrow a(a,y)),\ \forall x \forall y\, m(x,y),\ m(b,a) \Rightarrow a(a,b),\ \neg a(a,b),\ \forall y\, m(b,y)$$
$$\downarrow$$
$$\forall y\, (m(y,a) \Rightarrow a(a,y)),\ \forall x \forall y\, m(x,y),\ m(b,a) \Rightarrow a(a,b),\ \neg a(a,b),\ m(b,a)$$
$$\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$$

$\forall y(m(y,a) \Rightarrow a(a,y)),\ \forall x \forall y\, m(x,y),$ $\neg m(b,a),\ m(b,a),\ \neg a(a,b)$	$\forall y(m(y,a) \Rightarrow a(a,y)),\ \forall x \forall y\, m(x,y),$ $a(a,b),\ m(b,a),\ \neg a(a,b)$
X	X

Le raisonnement proposé est bien valide.

c) On note

$a(x,y)$: x admire y

Le raisonnement s'écrit :

Prémisses : $\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)]$

$\neg \exists x\ a(x,x)$

Conclusion : $\neg \exists x \exists y\ (a(x,y) \wedge a(y,x))$

On peut exprimer ce raisonnement par la formule

$$\{\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)] \wedge \neg \exists x\ a(x,x)\} \Rightarrow \neg \exists x \exists y\ (a(x,y) \wedge a(y,x))$$

On étudie sa validité en cherchant un modèle pour la négation de cette formule :

$$\neg\{\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow (x,z)] \wedge \neg \exists x\ a(x,x)\} \Rightarrow \neg \exists x \exists y\ (a(x,y) \wedge a(y,x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)] \wedge \neg \exists x\ a(x,x),\ \neg\neg \exists x \exists y\ (a(x,y) \wedge a(y,x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)] \wedge \neg \exists x\ a(x,x),\ \exists x \exists y\ (a(x,y) \wedge a(y,x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ \exists x \exists y\ (a(x,y) \wedge a(y,x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ \exists y\ (a(b,y) \wedge a(y,b))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ a(b,c) \wedge a(c,b)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ a(b,c),\ a(c,b)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ a(b,c),\ a(c,b),\ \forall y \forall z\ [(a(b,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(b,z)]$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ a(b,c),\ a(c,b),\ \forall z\ [(a(b,c) \wedge a(c,z)) \Rightarrow a(b,z)]$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ a(b,c),\ a(c,b),\ (a(b,c) \wedge a(c,b)) \Rightarrow a(b,b)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ \neg a(b,b),\ a(b,c),\ a(c,b),\ (a(b,c) \wedge a(c,b)) \Rightarrow a(b,b)$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ \neg a(b,b),\ a(b,c),\ a(c,b),\ \neg(a(b,c) \wedge a(c,b))$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x a(x,x),\ \neg a(b,b),\ a(b,c),\ a(c,b),\ a(b,b)$$

X

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ \neg a(b,b),\ a(b,c),\ a(c,b),\ \neg a(b,c)$$

X

$$\forall x \forall y \forall z\ [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)],\ \neg \exists x\ a(x,x),\ \neg a(b,b),\ a(b,c),\ a(c,b),\ \neg a(c,b)$$

X

Le raisonnement proposé est valide.

d) On note

c(x,y) : x est cause de y,

Le raisonnement s'écrit

Prémisse : $\forall x \exists y\ c(y,x)$

Conclusion : $\exists y \forall x\ c(y,x)$

On peut exprimer ce raisonnement par la formule $\forall x \exists y\ c(y,x) \Rightarrow \exists y \forall x\ c(y,x)$. On étudie sa validité en cherchant un modèle pour la négation de cette formule :

$$\neg[\forall x \exists y\ c(y,x) \Rightarrow \exists y \forall x\ c(y,x)]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y\ c(y,x)\ ,\ \neg \exists y \forall x\ c(y,x)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y\ c(y,x),\ \neg \exists y \forall x\ c(y,x),\ \exists y\ c(y,a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y\ c(y,x),\ \neg \exists y \forall x\ c(y,x),\ c(b,a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y\ c(y,x),\ \neg \exists y \forall x\ c(y,x),\ c(b,a),\ \neg \forall x\ c(b,x)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y\ c(y,x),\ \neg \exists y \forall x\ c(y,x),\ c(b,a),\ \neg c(b,c)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y\ c(y,x),\ \neg \exists y \forall x\ c(y,x),\ c(b,a),\ \neg c(b,c),\ \exists y\ c(y,c),$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y\ c(y,x),\ \neg \exists y \forall x\ c(y,x),\ c(b,a),\ \neg c(b,c),\ c(d,c)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y\ c(y,x),\ \neg \exists y \forall x\ c(y,x),\ c(b,a),\ \neg c(b,c),\ c(d,c),\ \neg \forall x\ c(d,x),$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y\ c(y,x),\ \neg \exists y \forall x\ c(y,x),\ c(b,a),\ \neg c(b,c),\ c(d,c),\ \neg c(d,e)$$

etc.

On obtient un tableau infini.

La formule de départ n'est pas valide.

e) On note

i(x,y) : x est identique à y

Le raisonnement s'écrit :

Prémisses : $\neg \exists x \exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x))$

$\forall x \forall y \forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z))$

$\forall x \exists y\ i(x,y)$

Conclusion : $\neg \exists x\ \neg i(x,x)$

On peut exprimer ce raisonnement par la formule

$[\neg \exists x \exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)) \wedge \forall x \exists y\ i(x,y)] \Rightarrow \neg \exists x\ \neg i(x,x)$

On étudie sa validité en cherchant un modèle pour la négation de cette formule :

$\neg\{[\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)) \wedge \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)) \wedge \forall x\exists y\ i(x,y)] \Rightarrow \neg\exists x\ \neg i(x,x)\}$

↓

$[\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)) \wedge \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)) \wedge \forall x\exists y\ i(x,y)],\ \neg\neg\exists x\ \neg i(x,x)\}$

↓

$[\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)) \wedge \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)) \wedge \forall x\exists y\ i(x,y)],\ \exists x\ \neg i(x,x)\}$

↓

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)), \forall x\exists y\ i(x,y),\ \exists x\ \neg i(x,x)$

↓

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)),\ \forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a)$

↓

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)),\ \forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a),\ \exists y\ i(a,y)$

↓

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)),\ \forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a),\ i(a,b)$

↓

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)), \forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a),\ i(a,b),$
$\neg\exists y\ (i(a,y) \wedge \neg i(y,a))$

↓

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)),\ \forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a),\ i(a,b),$
$\neg(i(a,b) \wedge \neg i(b,a))$

↓

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)),\ \forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a),\ i(a,b),$
$\neg(i(a,b) \wedge \neg i(b,a)),\ \forall y\forall z\ (i(a,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(a,z))$

↓

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)), \forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a),\ i(a,b),$
$\neg(i(a,b) \wedge \neg i(b,a)),\ \forall z\ (i(a,b) \wedge i(b,z) \Rightarrow i(a,z))$

↓

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)),\ \forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a),\ i(a,b),$
$\neg(i(a,b) \wedge \neg i(b,a)),\ (i(a,b) \wedge i(b,a)) \Rightarrow i(a,a)$

↙ ↘

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)),$
$\forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a),\ i(a,b),\ \neg i(a,b),\ i(a,b) \wedge i(b,a) \Rightarrow i(a,a)$

X

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z)$
$\forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i(a,a),\ i(a,b),\ i(b,a),\ i(a,b) \wedge i(b,a) \Rightarrow i(a,a)$

↙ ↘

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),$
$\forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z),$
$\forall x\exists y\ i(x,y),$
$\neg i\ (a,a),\ i(a,b)\ i(b,a),$
$\neg(i(a,b) \wedge i(b,a))$

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x))$
$\forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z),$
$\forall x\exists y\ i(x,y),\ \neg i\ (a,a),\ i(a,b),$
$i(b,a),\ i(a,a)$

X

↙ ↘

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),$
$\forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z),$
$\forall x\exists y\ i(x,y),$
$\neg i\ (a,a),\ i(a,b),\ i(b,a),\ \neg i(a,b)$

X

$\neg\exists x\exists y\ (i(x,y) \wedge \neg i(y,x)),$
$\forall x\forall y\forall z\ (i(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z),$
$\forall x\exists y\ i(x,y),$
$\neg i\ (a,a),\ i(a,b),\ i(b,a),\ \neg i(b,a)$

X

Le raisonnement proposé est valide.

106. a) $\exists x\forall y(p(x,y)\Rightarrow a(x,y))$

$\forall x(p(x,x)\Rightarrow\neg a(x,x))\wedge\forall x\ p(x,x)$

b) $\forall x\exists y(p(y,x)\wedge a(x,y))$

$\forall x\forall y(a(x,y)\Rightarrow\neg p(y,x))$

c) $\exists x\forall y(p(x,y)\wedge p(y,x))$

$\exists x\exists y(a(x,y)\wedge a(y,x)) \wedge \neg\ \exists x\exists y(p(x,y)\wedge p(y,x))$

Prouvons, par exemple, que les deux énoncés du groupe a) ne peuvent pas être tous deux vrais. Nous allons montrer que la formule suivante n'a pas de modèle :
$\exists x\forall y(p(x,y)\Rightarrow a(x,y)) \wedge \forall x(p(x,x)\Rightarrow\neg a(x,x)) \wedge \forall x\ p(x,x)$

$$\exists x\forall y(p(x,y) \Rightarrow a(x,y)) \wedge (\forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)) \wedge \forall x\, p(x,x)$$

↓

$$\exists x\forall y(p(x,y) \Rightarrow a(x,y)),\ \forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)),\ \forall x\, p(x,x)$$

↓

$$\forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)),\ \forall x\, p(x,x),\ \forall y(p(a,y) \Rightarrow a(a,y))$$

↓

$$\forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)),\ \forall x\, p(x,x),\ \forall y(p(a,y) \Rightarrow a(a,y)),\ p(a,a) \Rightarrow \neg a(a,a)$$

↓

$$\forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)),\ \forall x\, p(x,x),\ \forall y(p(a,y) \Rightarrow a(a,y)),\ p(a,a) \Rightarrow \neg a(a,a),\ p(a,a)$$

↓

$$\forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)),\ \forall x\, p(x,x),\ \forall y(p(a,y) \Rightarrow a(a,y)),\ p(a,a) \Rightarrow \neg a(a,a),\ p(a,a),\ p(a,a) \Rightarrow a(a,a)$$

↙ ↘

$\forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)),\ \forall x\, p(x,x),$
$\forall y(p(a,y) \Rightarrow a(a,y)),\ \neg p(a,a)$
$p(a,a),\ p(a,a) \Rightarrow a(a,a)$

X

$\forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)),\ \forall x\, p(x,x),$
$\forall y(p(a,y) \Rightarrow a(a,y)),\ \neg a(a,a),$
$p(a,a),\ p(a,a) \Rightarrow a(a,a)$

↙ ↘

$\forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)),$
$\forall x\, p(x,x),\ \forall y(p(a,y) \Rightarrow a(a,y)),$
$\neg a(a,a),\ p(a,a),\ \neg p(a,a)$

X

$\forall x(p(x,x) \Rightarrow \neg a(x,x)),$
$\forall x\, p(x,x),$
$\forall y(p(a,y) \Rightarrow a(a,y)),$
$\neg a\ (a,a),\ p(a,a),\ a(a,a)$

X

107. a) $(f(a) \Rightarrow g(a)) \wedge (f(b) \Rightarrow g(b)) \wedge (f(c) \Rightarrow g(c))$

b) $(f(a) \wedge \neg g(a)) \vee (f(b) \wedge \neg g(b)) \vee (f(c) \wedge \neg g(c))$

108. a) $p(a) \vee p(b) \vee p(c) \Leftrightarrow \neg(\neg p(a) \wedge \neg p(b) \wedge \neg p(c))$

b) $p(a) \wedge p(b) \wedge p(c) \Leftrightarrow \neg(\neg p(a) \vee \neg p(b) \vee \neg p(c))$

109. a) Il y a quelqu'un qui boit le champagne s'il réussit l'examen

b) Si tout le monde réussit l'examen, il y a quelqu'un qui boira le champagne

c) Si quelqu'un réussit l'examen, tout le monde boira le champagne

d) Chacun boit le champagne s'il réussit l'examen

110. Avec p(x) : x est rouge

q(x) : x est bleu

a) « Il y a un objet qui est à la fois rouge et bleu » n'est pas équivalent à « Il y a un objet qui est rouge et il y a un objet – pas nécessairement le même - qui est bleu »

b) « Chaque objet est rouge ou bleu » n'est pas équivalent à « Tous les objets sont rouges ou tous les objets sont bleus »

Avec q(x) : x arrive

p : je préfère m'en aller

c) « Il y a quelqu'un qui est tel que, s'il arrive, je préfère m'en aller » n'est pas équivalent à « S'il y a quelqu'un qui arrive, je préfère m'en aller ».

d) « Si qui que ce soit arrive, je préfère m'en aller » n'est pas équivalent à « Si tout le monde arrive, je préfère m'en aller »

111. b, c et e sont valides. Les autres ne le sont pas.

a) et b) : Voir les règles 3 et 4 dans la partie théorique. On a $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$ et $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x))$, mais le quantificateur universel ne se distribue pas sur la disjonction, ni le quantificateur existentiel sur la conjonction.

c) N'est autre que la règle 9

d) N'est pas valide. La règle 10 nous apprend en effet que $\exists x\ (Q(x) \Rightarrow p) \leftrightarrow (\forall x\ Q(x) \Rightarrow p)$

e) Est une application immédiate de la règle 12 qui affirme que
$\forall x\ (Q(x) \Rightarrow p) \leftrightarrow (\exists x\ Q(x) \Rightarrow p)$

f) N'est pas valide. Les règles du calcul des propositions permettent d'affirmer que $(\neg\exists x\ p(x) \vee \neg\exists\ x\ q(x))$ est équivalent à $\neg(\exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x))$, qui n'est pas équivalent à $\neg\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$

112. Les formules a, g, h et j sont équivalentes à $\neg\forall x\ (p(x) \vee q(x))$. Les autres ne le sont pas.

a) $\exists x\ (\neg p(x) \wedge \neg q(x))$
$\leftrightarrow \neg\neg\exists x\ (\neg p(x) \wedge \neg q(x))$
$\leftrightarrow \neg\forall x \neg(\neg p(x) \wedge \neg q(x))$
$\leftrightarrow \neg\forall x(p(x) \vee q(x))$

b) $\exists x \neg(p(x) \wedge q(x))$
$\leftrightarrow \neg\forall x(p(x) \wedge q(x))$, qui n'est manifestement pas équivalente à $\neg\forall x\ (p(x) \vee q(x))$

c) $\neg\forall x\ p(x) \vee \neg\forall x\ q(x))$
$\leftrightarrow \exists x\ \neg p(x) \vee \exists x\ \neg q(x)$
$\leftrightarrow \exists x\ (\neg p(x) \vee \neg q(x))$
$\leftrightarrow \exists x\ \neg(p(x) \wedge q(x))$, qui n'est autre que la formule b)

d) $\exists x\ (\neg p(x) \vee \neg q(x))$, équivalente à b) et donc pas équivalente à $\neg\forall x\ (p(x) \vee q(x))$

e) $\forall x(\neg p(x) \vee \neg q(x))$
Dire que tous les x sont non p ou non q, ce n'est pas équivalent à dire qu'il y a un x qui est à la fois non p et non q

f) $\neg\forall x\ (p(x) \Rightarrow \neg q(x))$
$\leftrightarrow \neg\forall x\ (\neg p(x) \vee \neg q(x)$, qui n'est manifestement pas équivalent à $\neg\forall x\ (p(x) \vee q(x))$

g) $\neg\forall x\ (\neg p(x) \Rightarrow q(x))$
$\leftrightarrow \neg\forall x\ (p(x) \vee q(x))$

h) $\exists x\ \neg(p(x) \vee q(x))$
Se ramène à a) par une application des lois de De Morgan :
$\leftrightarrow \exists x\ (\neg p(x) \wedge \neg q(x))$

i) $\exists x\ \neg p(x) \wedge \exists x\ \neg q(x)$
Cette formule n'est pas équivalente à a), car le quantificateur existentiel ne se distribue pas sur la conjonction

j) $\exists x\ \neg(\neg q(x) \Rightarrow p(x))$
$\leftrightarrow \exists x\ \neg(q(x) \vee p(x))$ qui n'est autre que la formule h)

113. a) $\exists x(p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists x\ q(x))$
$\exists x(p(x) \Rightarrow q(x))$
$\leftrightarrow \exists x(\neg p(x) \vee q(x))$ Prop.
$\leftrightarrow \exists x \neg p(x) \vee \exists x\ q(x)$ Préd.
$\leftrightarrow \neg\forall x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$ Préd.
$\leftrightarrow \forall x\ p(x) \Rightarrow \exists x\ q(x)$ Prop.

b) $\exists y \exists x\, (p(x,y) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\forall y \forall x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, q(x))$

$\exists y \exists x\, (p(x,y) \Rightarrow q(x))$	
$\leftrightarrow \exists y \exists x\, (\neg p(x,y) \vee q(x))$	Prop.
$\leftrightarrow \exists y\, (\exists x\, \neg p(x,y) \vee \exists x\, q(x))$	Préd.
$\leftrightarrow \exists y\, \exists x\, \neg p(x,y) \vee \exists\, x\, q(x)$	Préd.
$\leftrightarrow \exists y\, \neg \forall x\, p(x,y) \vee \exists\, x\, q(x)$	Préd
$\leftrightarrow \neg \forall y\, \forall x\, p(x,y) \vee \exists\, x\, q(x))$	Préd.
$\leftrightarrow \forall y \forall x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, q(x)$	Prop.

c) $(\forall y \exists x\, (p(x,y) \Rightarrow q(x))) \Leftrightarrow \exists y \forall x\, (p(x,y) \Rightarrow q(x))$

$\forall y \exists x\, (p(x,y) \Rightarrow q(x))$	
$\leftrightarrow \forall y \exists x\, (\neg p(x,y) \vee q(x))$	Prop.
$\leftrightarrow \forall y\, (\exists x \neg p(x,y) \vee \exists x\, q(x))$	Préd.
$\leftrightarrow \forall y\, (\neg \forall x\, p(x,y) \vee \exists x\, q(x))$	Préd.
$\leftrightarrow \forall y\, (\forall x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, q(x))$	Prop.
$\leftrightarrow \exists y \forall x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, q(x)$	Préd.

114. À titre d'exemple, voici la résolution de six des treize exercices proposés :

a) $\forall y\, [\forall x\, p(x) \Rightarrow p(y)]$

1.	$\quad\mid\ \forall x\, p(x)$	*Hyp.*	
2.	$\quad\mid\ p(c)$	*1, E∀*	
3.	$\forall x\, p(x) \Rightarrow p(c)$	*1,2, Déch. 1, I ⇒*	
4.	$\forall y (\forall x\, p(x) \Rightarrow p(c))$	*I∀*	c

b) $\forall y\, (p(y) \Rightarrow \forall x\, p(x))$

1.	$\quad\mid\ p(c)$	*Hyp.*	
2.	$\quad\mid\ \forall x\, p(x)$	*1, I∀*	c
3.	$p(c) \Rightarrow \forall x\, p(x)$	*1,2, Déch.1, I⇒*	
4.	??		

Il est impossible de conclure, car il faudrait introduire un quantificateur universel sur une variable (c) qui a déjà été signalée précédemment.

e) $\forall x\, (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$

1.	$\quad\mid\ \forall x\, (p(x) \wedge q(x))$	*Hyp.*	
2.	$\quad\mid\ p(c) \wedge q(c)$	*1,E∀*	
3.	$\quad\mid\ p(c)$	*2, E∧*	
4.	$\quad\mid\ \forall x\, p(x)$	*3, I∀*	c
5.	$\quad\mid\ p(d) \wedge q(d)$	*1, E∀*	
6.	$\quad\mid\ q(d)$	*5, E∧*	
7.	$\quad\mid\ \forall x\, q(x)$	*6, I∀*	d
8.	$\quad\mid\ \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$	*4,7, I∧*	
9.	$\forall x\, (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$	*1,8, Déch.1, I⇒*	
10.	$\quad\mid\ \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$	*Hyp.*	
11.	$\quad\mid\ \forall x\, p(x)$	*10, E∧*	
12.	$\quad\mid\ p(e)$	*11, E∀*	
13.	$\quad\mid\ \forall x\, q(x)$	*10, E∧*	

14.	$q(e)$	*13, E*$\forall$	
15.	$p(e) \wedge q(e)$	*12,14, I*$\wedge$	
16.	$\forall x\,(p(x) \wedge q(x))$	*15, I*$\forall$	e
17.	$\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) \Rightarrow \forall x\,(p(x) \wedge q(x))$	*10,16, Déch.1, I*$\Rightarrow$	
18.	$\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x\,(p(x) \wedge q(x))$	*9,17, I*$\Leftrightarrow$	

g) $\exists x\,(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$

1.	$\exists x\,(p(x) \wedge q(x))$	*Hyp.*	
2.	$p(c) \wedge q(c)$	*1, E*$\exists$	c
3.	$p(c)$	*2, E*$\wedge$	
4.	$\exists x\, p(x)$	*3, I*$\exists$	
5.	$q(c)$	*2, E*$\wedge$	
6.	$\exists x\, q(x)$	*5, I*$\exists$	
7.	$\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$	*4,6, I*$\wedge$	
8.	$\exists x\,(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists\, x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$	*1,7, Déch.1, I* $\Rightarrow$	

h) $\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x) \Rightarrow \exists x\,(p(x) \wedge q(x))$

1.	$\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$	*Hyp*	
2.	$\exists x\, p(x)$	*1, E*$\wedge$	
3.	$p(c)$	*2, E*$\exists$	c
4.	$\exists\, x\, q(x)$	*1, E*$\wedge$	
5.	$q(d)$	*4, E*$\exists$	d
6.	??		

Il n'est pas possible de conclure. Pour poursuivre la démonstration, il aurait fallu instancier *∃x q(x)* avec la constante *c*, de manière à obtenir *p(c)∧q(c)* que l'on pourrait ensuite quantifier pour obtenir la seconde partie de l'implication. Mais l'instanciation de *∃x q(x)* avec *c* n'est pas autorisée, il faut toujours instancier les existentielles avec des constantes inédites et le *c* a déjà été utilisé à la ligne 3.

k) $\exists x \forall y\, r(x,y) \vee \exists x \exists y\, \neg r(x,y)$

1.	$\neg[\exists x \forall y\, r(x,y) \vee \exists x \exists y\, \neg r(x,y)]$	*Hyp*	
2.	$\exists x \forall y\, r(x,y)$	*Hyp.*	
3.	$\exists x \forall y\, r(x,y) \vee \exists x \exists y\, \neg r(x,y)$	*2, I*$\vee$	
4.	$\neg \exists x \forall y\, r(x,y)$	*1,3, Déch.* 2, *I*$\neg$	
5.	$\exists x \exists y \neg\, r(x,y)$	*Hyp.*	
6.	$\exists x \forall y\, r(x,y) \vee \exists x \exists y\, \neg r(x,y)$	*5, I*$\vee$	
7.	$\neg \exists x \exists y\, \neg r(x,y)$	*1,6, Déch. 5, I*$\neg$	
8.	$r(a,b)$	*Hyp*	
9.	$\forall y\, r(a,y)$	*8, I*$\forall$	b
10.	$\exists x \forall y\, r(x,y)$	*9, I*$\exists$	
11.	$\neg r(a,b)$	*4,10, Déch.8, I*$\neg$	
12.	$\exists y \neg r(a,y)$	*11, I*$\exists$	
13.	$\exists x\, \exists y\, \neg r(x,y)$	*12, I*$\exists$	
14.	$\neg\neg \exists x \forall y\, r(x,y) \vee \exists x \exists y\, \neg r(x,y)$	*7,13,Déch.1, I*$\neg$	
15.	$\exists x \forall y\, r(x,y) \vee \exists x \exists y\, \neg r(x,y)$	*14, E*$\neg$	

115. Il s'agit de démontrer la validité du raisonnement suivant

Prémisses : $h(j)\Rightarrow b(j)$

$l(j)\wedge\neg a(j)$

$\forall x(b(x)\Rightarrow a(x))$

Conclusion : $\neg h(j)$

1.	$h(j)\Rightarrow b(j)$	*Pr.*	
2.	$l(j)\wedge\neg a(j)$	*Pr.*	
3.	$\forall x(b(x)\Rightarrow a(x))$	*Pr.*	
4.	│ $h(j)$	*Hyp.*	
5.	│ $b(j)$	*1,4, E⇒*	
6.	│ $b(j)\Rightarrow a(j)$	*3, E∀*	
7	│ $a(j)$	*5,6, E⇒*	
8.	│ $\neg a(j)$	*2,* E∧	
9.	$\neg h(j)$	*7,8, Déch.4, I¬*	

116. Il s'agit de montrer que la formule suivante est valide :

$[\forall x\forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))] \Rightarrow \forall x\ \neg p(x,x)$

1.	$\forall x\forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))$	*Hyp.*	
2.	│ $p(a,a)$	*Hyp.*	
3.	│ $\forall y(p(a,y)\Rightarrow\neg p(y,a))$	*1, E∀*	
4.	│ $p(a,a)\Rightarrow\neg p(a,a))$	*3, E∀*	
5.	│ $\neg p(a,a)$	*2,4,E⇒*	
6.	$\neg p(a,a)$	*2,5, Déch.2, I¬*	
7.	$\forall x\neg p(x,x)$	*6, I∀*	a
8.	$[\forall x\forall y\ (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))] \Rightarrow \forall x\ \neg p(x,x)$	*1,7, Déch.1, I⇒*	

117. Il faut démontrer que $[\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))] \Leftrightarrow[\neg\exists x(p(x)\wedge\neg q(x))]$

1.	│ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$	*Hyp.*	
2.	│ │ $\exists x(p(x)\wedge\neg q(x)$	*Hyp.*	
3.	│ │ $p(a)\wedge\neg q(a)$	*2, E∃*	a
4.	│ │ $p(a)$	*3, E∧*	
5.	│ │ $\neg q(a)$	*3, E∧*	
6.	│ │ $p(a)\Rightarrow q(a)$	*1, E∀*	
7.	│ │ $q(a)$	*4,6,E⇒*	
8.	│ $\neg\exists x(p(x)\wedge\neg q(x))$	*5,7, Déch.2, I¬*	
9.	$[\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))] \Rightarrow[\neg\exists x(p(x)\wedge\neg q(x)]$	*1,8, Déch.1, I⇒*	
10.	│ $\neg\exists x(p(x)\wedge\neg q(x))$	*Hyp.*	
11.	│ │ $p(b)$	*Hyp.*	
12.	│ │ │ $\neg q(b)$	*Hyp.*	
13.	│ │ │ $p(b)\wedge\neg q(b)$	*11,12, I∧*	
14.	│ │ │ $\exists x(p(x)\wedge\neg q(x))$	*13, I∃*	
15.	│ │ $\neg\neg q(b)$	*10,15, Déch.12, I¬*	
16.	│ │ $q(b)$	*15, E¬*	

17.	$\mid$ $p(b)\Rightarrow q(b)$	*11,16, Déch.11, I⇒*	
18.	$\mid$ $\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(x))$	*17, I∀*	b
19.	$[\neg\exists x(p(x)\wedge\neg q(x))] \Rightarrow [\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))]$	*10, 18, Déch.10, I⇒*	
20.	$[\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))] \Leftrightarrow [\neg\exists x(p(x)\wedge\neg q(x))]$	*9,19, I⇔*	

118. Il faut démontrer que, pour autant que la condition d'existence soit réalisée, A et E ne peuvent être vraies en même temps, c'est-à-dire que $[\forall x(p(x)\Rightarrow q(x))\wedge\exists x p(x)] \Rightarrow \neg\neg\exists x(p(x) \wedge q(x))$

1.	$\mid$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))\wedge\exists x\, p(x)$	*Hyp.*	
2.	$\mid$ $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$	*1, E∧*	
3.	$\mid$ $p(a)\Rightarrow q(a)$	*2, E∀*	
4.	$\mid$ $\exists x\, p(x)$	*1,E∧*	
5.	$\mid$ $p(a)$	*4, E∃*	a
6.	$\mid$ $q(a)$	*3,5, E⇒*	
7.	$\mid$ $p(a)\wedge q(a)$	*5,6, I∧*	
8.	$\mid$ $\exists x(p(x)\wedge q(x))$	*7, I∃*	
9.	$\mid$ $\mid$ $\neg\exists x(p(x)\wedge q(x))$	*Hyp.*	
10.	$\mid$ $\neg\neg\exists x(p(x)\wedge q(x))$	*8,9, Déch.9, I¬*	
9.	$(\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))\wedge\exists x(p(x))) \Rightarrow \neg\neg\exists x(p(x)\wedge q(x))$	*1,10, Déch.1 I⇒*	

Remarquons que si nous ne disposons pas de la conditions d'existence, il n'est pas possible de conclure : les lignes 4, 5 et 6 sont indispensables pour pouvoir obtenir *p(a)∧q(a)* à partir de *p(a)⇒q(a)*

119. On peut évidemment reprendre ici la remarque faite précédemment dans le cadre de la résolution de l'exercice par les tableaux sémantiques : montrer que, si A est vraie, I est vraie, pour autant que la condition d'existence soit satisfaite, c'est montrer que le schéma $[\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))\wedge\exists x(p(x))] \Rightarrow \exists x(p(x)\wedge q(x))$ est valide. Cette dernière formule est précisément celle qui a été traitée dans l'exercice précédent (au fait près que, dans l'exercice précédent, le second membre de l'implication est précédé d'une double négation). Les conclusions demandées (y compris à propos de la nécessité de la condition d'existence) peuvent donc être tirées du tableau de l'exercice précédent.

Montrer que, si E est vraie, O l'est aussi, pour autant que la condition d'existence soit satisfaite, c'est montrer que le schéma $[\neg\exists x(p(x)\wedge q(x)) \wedge \exists x\, p(x)]\Rightarrow \exists x(p(x)\wedge\neg q(x))$ est valide.

1.	$\mid$ $\neg\exists x(p(x)\wedge q(x)) \wedge \exists x\, p(x)$	*Hyp.*	
2.	$\mid$ $\exists x\, p(x)$	*1, E∧*	
3.	$\mid$ $p(a)$	*2, E∃*	a
4.	$\mid$ $\mid$ $q(a)$	*Hyp.*	
5.	$\mid$ $\mid$ $p(a)\wedge q(a)$	*3,4, I∧*	
6.	$\mid$ $\mid$ $\exists x\,(p(x)\wedge q(x))$	*5, I∃*	
7.	$\mid$ $\mid$ $\neg\exists x\,(p(x)\wedge q(x))$	*1,E∧*	
8.	$\mid$ $\neg q(a)$	*6,7, Déch.4, I¬*	
9.	$\mid$ $p(a)\wedge\neg q(a)$	*3,8, I∧*	
10.	$\mid$ $\exists x(p(x)\wedge\neg q(x))$	*9, I∃*	
11.	$[\neg\exists x(p(x)\wedge q(x)) \wedge \exists x\, p(x)]\Rightarrow \exists x(p(x)\wedge\neg q(x))$	*1,10, Déch.1, I⇒*	

On constate que, dans ce cas également, la condition d'existence est indispensable.

120. Il s'agit de montrer que le raisonnement suivant est valide :

Prémisses : $\neg\exists x(g(x)\wedge h(x))$

$\exists x(f(x)\wedge g(x))$

Conclusion : $\exists x\ (f(x)\wedge\neg h(x))$

1.	$\neg\exists x(g(x)\wedge h(x))$	*Pr.*	
2.	$\exists x(f(x)\wedge g(x))$	*Pr.*	
3.	$f(a)\wedge g(a)$	*2, E∃*	a
4.	$f(a)$	*3, E∧*	
5.		$h(a)$	*Hyp.*	
6.		$g(a)$	*3, E∧*	
7.		$g(a)\wedge h(a)$	*5,6, I∧*	
8.		$\exists x(g(x)\wedge h(x))$	*7, I∃*	
9.	$\neg h(a)$	*1,8, Déch. 5, I¬*	
10.	$f(a)\wedge\neg h(a)$	*4,9, I∧*	
11.	$\exists x(f(x)\wedge\neg h(x))$	*10, I∃*	

Le syllogisme en Ferio est donc bien valide.

121. a) Il s'agit d'étudier le raisonnement suivant :

Prémisses: $\forall x\ (l(x)\Rightarrow d(x))$

$\forall x\ (r(x)\Rightarrow l(x))$

Conclusion : $\exists x\ (r(x)\wedge d(x))$

1.	$\forall x\ (l(x)\Rightarrow d(x))$	*Pr.*
2.	$\forall x\ (r(x)\Rightarrow l(x))$	*Pr.*
3.	$l(a)\Rightarrow d(a)$	*1, E∀*
4.	$r(a)\Rightarrow l(a)$	*2, E∀*
5.	*??*	

On constate assez vite que l'on ne pourra pas conclure, mais que si on disposait de la condition d'existence $\exists x\ r(x)$, on pourrait obtenir $r(a)$ par instanciation, puis $l(a)$ par application du *modus ponens* à 4 et $d(a)$ par application du *modus ponens* à 3. On pourrait ensuite conclure en quantifiant existentiellement $r(a)\wedge d(a)$.

122. a) Le raisonnement s'écrit :

Prémisse : $\exists x\forall y\ \neg c(x,y)$

Conclusion : $\neg\exists x\forall y\ c(y,x)$

1.	$\exists x\forall y\ \neg c(x,y)$	*Pr.*	
2.		$\exists x\forall y\ c(y,x)$	*Hyp.*	
3.		$\forall y\ c(y,a)$	*2, E∃*	a
4.		$c(b,a)$	*3, E∀*	
5.		$\forall y\neg c(b,y)$	*1,E∃*	b
6.		$\neg c(b,a)$	*5, E∀*	
7.	$\neg\exists x\forall y\ c(y,x)$	*4,6, Déch.2, I¬*	

Le raisonnement proposé est bien valide.

b) Le raisonnement s'écrit :

Prémisses : $\exists x \forall y\, (m(y,x) \Rightarrow a(x,y))$

$\forall x \forall y\, m(x,y)$

Conclusion : $\exists x \forall y\, a(x,y)$

1.	$\exists x \forall y\, (m(y,x) \Rightarrow a(x,y))$	*Pr.*	
2.	$\forall x \forall y\, m(x,y)$	*Pr.*	
3.	$\forall y\, m(b,y)$	*2, E∀*	
4.	$m(b,a)$	*3, E∀*	
5.	$\forall y\, (m(y,a) \Rightarrow a(a,y))$	*1, E∃*	a
6.	$m(b,a) \Rightarrow a(a,b)$	*5, E∀*	
7.	$a(a,b)$	*4,6, E⇒*	
8.	$\forall y\, a(a,y)$	*7,I∀*	b
9.	$\exists x \forall y\, a(x,y)$	*8, I∃*	

Le raisonnement proposé est valide.

c) Le raisonnement s'écrit :

Prémisses : $\forall x \forall y \forall z\, [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)]$

$\neg \exists x\, a(x,x)$

Conclusion : $\neg \exists x \exists y\, (a(x,y) \wedge a(y,x))$

1.	$\forall x \forall y \forall z\, [(a(x,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(x,z)]$	*Pr.*	
2.	$\neg \exists x\, a(x,x)$	*Pr.*	
3.	│ $\exists x \exists y\, (a(x,y) \wedge a(y,x))$	*Hyp.*	
4.	│ $\exists y\, (a(a,y) \wedge a(y,a))$	*3, E∃*	a
5.	│ $a(a,b) \wedge a(b,a)$	*4, E∃*	b
6.	│ $\forall y \forall z\, [(a(a,y) \wedge a(y,z)) \Rightarrow a(a,z)]$	*1, E∀*	
7.	│ $\forall z\, [(a(a,b) \wedge a(b,z)) \Rightarrow a(a,z)]$	*6, E∀*	
8.	│ $a(a,b) \wedge a(b,a) \Rightarrow a(a,a)$	*7, E∀*	
9.	│ $a(a,a)$	*5,8, E⇒*	
10.	│ $\exists x\, a(x,x)$	*9, I∃*	
11.	$\neg \exists x \exists y\, (a(x,y) \wedge a(y,x))$	*2, 10, Déch.3 I¬*	

Le raisonnement proposé est valide.

d) Le raisonnement s'écrit :

Prémisse : $\forall x \exists y\, c(y,x)$

Conclusion : $\exists y \forall x\, c(y,x)$

1.	$\forall x \exists y\, c(y,x)$	*Hyp.*	
2.	$\exists y\, c(y,a)$	*1, E∀*	
3.	$c(b,a)$	*2, E∃*	b

Il est impossible de poursuivre la démonstration, parce que pour obtenir la conclusion, il faudrait d'abord quantifier universellement *c(b,a)* sur la variable *a* (pour obtenir $\forall x\, c(b,x)$, que l'on pourrait ensuite sans problème quantifier existentiellement sur *y*). Or nous ne sommes pas autorisés à quantifier universellement *c(b,a)* sur la variable *a*, parce que a est alphabétiquement postérieure à *b*. Et il n'est pas possible de résoudre le problème en instantiant avec une lettre postérieure à *b* dans la ligne 2, parce qu'alors la ligne 3 contiendrait une variable libre postérieure à la lettre *b* signalée.

e) Le raisonnement s'écrit :

Prémisses : $\neg\exists x\exists y\,(i(x,y)\wedge\neg i(y,x))$

$\forall x\forall y\forall z\,(i(x,y)\wedge i(y,z)\Rightarrow i(x,z))$

$\forall x\exists y\; i(x,y)$

Conclusion : $\neg\exists x\,\neg i(x,x)$

1.	$\neg\exists x\exists y\,(i(x,y)\wedge\neg i(y,x))$	*Pr.*	
2.	$\forall x\forall y\forall z\,(i(x,y)\wedge i(y,z)\Rightarrow i(x,z))$	*Pr.*	
3.	$\forall x\exists y\; i(x,y)$	*Pr.*	
4.	│ $\exists x\neg i(x,x)$	*Hyp*	
5.	│ $\neg i(a,a)$	*4, E∃*	a
6.	│ $\exists y\; i(a,y)$	*3, E∀*	
7.	│ $i(a,b)$	*6, E∃*	b
8.	│ │ $\neg i(b,a)$	*Hyp.*	
9.	│ │ $i(a,b)\wedge\neg i(b,a)$	*7,8, I∧*	
10.	│ │ $\exists y\,(i(a,y)\wedge\neg i(y,a))$	*9, I∃*	
11.	│ │ $\exists x\exists y(i(x,y)\wedge\neg i(y,x))$	*10, I∃*	
12.	│ $\neg\neg i(b,a)$	*1,11, Déch. 8 I¬*	
13.	│ $i(b,a)$	*12, E¬*	
14.	│ $i(a,b)\wedge i(b,a)$	*7,13, I∧*	
15.	│ $\forall y\forall z\,(i(a,y)\wedge i(y,z)\Rightarrow i(a,z))$	*2, E∀*	
16.	│ $\forall z\,(i(a,b)\wedge i(b,z)\Rightarrow i(a,z))$	*15, E∀*	
17.	│ $(i(a,b)\wedge i(b,a))\Rightarrow i(a,a)$	*16, E∀*	
18.	│ $i\,(a,a)$	*14,17 E⇒*	
19.	$\neg\exists x\,\neg i(x,x)$	*5,18, Déch. 4, I¬*	

123. Démontrons par exemple que les deux énoncés du groupe b. sont incompatibles en prouvant que si $\forall x\exists y(p(y,x)\wedge a(x,y))$ est vrai, $\forall x\forall y(a(x,y)\Rightarrow\neg p(y,x))$ est nécessairement faux, c'est-à-dire que si l'on prend $\forall x\exists y(p(y,x)\wedge a(x,y))$ comme prémisse, on peut démontrer la négation de $\forall x\forall y(a(x,y)\Rightarrow\neg p(y,x))$.

1.	$\forall x\exists y(p(y,x)\wedge a(x,y))$		*Pr.*
2.	│ $\forall x\forall y(a(x,y)\Rightarrow\neg p(y,x))$	*Hyp.*	
3.	│ $\forall y(a(a,y)\Rightarrow\neg p(y,a))$	*2, E∀*	
4.	│ $a(a,b)\Rightarrow\neg p(b,a)$	*3, E∀*	
5.	│ $\exists y(p(y,a)\wedge a(a,y))$	*1, E∀*	
6.	│ $p(b,a)\wedge a(a,b)$	*5, E∃*	b
7.	│ $a(a,b)$	*6, E∧*	
8.	│ $\neg p(b,a)$	*4,7, E⇒*	
9.	│ $p(b,a)$	*6, E∧*	
10.	$\neg\forall x\forall y(a(x,y)\Rightarrow\neg p(y,x))$	*8,9, Déch. 2, I¬*	

124. a) $\neg\forall x\, f(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg f(x)$

1.	$\vert\ \neg\forall x\, f(x)$	*Hyp.*	
2.	$\vert\quad \vert\ f(a)$	*Hyp.*	
3.	$\vert\quad \vert\ \forall x\, f(x)$	*2,I*$\forall$	a
4.	$\vert\ \neg f(a)$	*1,3, Déch.2, I*$\neg$	
5.	$\vert\ \exists x\, \neg f(x)$	*4, I*$\exists$	
6.	$\neg\forall x\, f(x) \Rightarrow \exists x \neg f(x)$	*1,4, Déch.1, I*$\Rightarrow$	
7.	$\vert\ \exists x \neg f(x)$	*Hyp.*	
8.	$\vert\ \neg f(b)$	*7, E*$\exists$	b
9.	$\vert\quad \vert\ \forall x\, f(x)$	*Hyp.*	
10.	$\vert\quad \vert\ f(b)$	*9, E*$\forall$	
11.	$\vert\ \neg\forall x\, f(x)$	*8,10, Déch.9, I*$\neg$	
12.	$\exists x \neg f(x) \Rightarrow \neg\forall x\, f(x)$	*7,11, Déch.7, I*$\Rightarrow$	
13.	$\neg\forall x\, f(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg f(x)$	*6,12, I*$\Leftrightarrow$	

c) $\neg\exists x\forall y\, r(x,y) \Leftrightarrow \forall x\exists y\, \neg r(x,y)$

1.	$\vert\ \neg\exists x\forall y\, r(x,y)$	*Hyp.*	
2.	$\vert\quad \vert\ r(a,b)$	*Hyp*	
3.	$\vert\quad \vert\ \forall y\, r(a,y)$	*2, I*$\forall$	b
4.	$\vert\quad \vert\ \exists x\, \forall y\, r(x,y)$	*3, I*$\exists$	
5.	$\vert\ \neg r(a,b)$	*1,4, Déch.2, I*$\neg$	
6.	$\vert\ \exists y \neg r(a,y)$	*5, I*$\exists$	
7.	$\vert\ \forall x\exists y \neg r(x,y)$	*6, I*$\forall$	a
8.	$\neg\exists x\forall y\, r(x,y) \Rightarrow \forall x\exists y \neg r(x,y)$	*1, 7, Déch.1, I*$\Rightarrow$	
9.	$\vert\ \forall x\exists y \neg r(x,y)$	*Hyp.*	
10.	$\vert\quad \vert\ \exists x\forall y\, r(x,y)$	*Hyp.*	
11.	$\vert\quad \vert\ \forall y\, r(c,y)$	*10, E*$\exists$	c
12.	$\vert\quad \vert\ r(c,d)$	*11, E*$\forall$	
13.	$\vert\quad \vert\ \exists y \neg r(c,y)$	*12, E*$\forall$	
14.	$\vert\quad \vert\ \neg r(c,d)$	*13, E*$\exists$	*d*
15.	$\vert\ \neg\exists x\forall y\, r(x,y)$	*12,14, Déch.10, I*$\neg$	
16.	$\forall x\exists y \neg r(x,y) \Rightarrow \neg\exists x\forall y\, r(x,y)$	*9,15,Déch.9, I*$\Rightarrow$	
17.	$\neg\exists x\forall y\, r(x,y) \Leftrightarrow \forall x\exists y\, \neg r(x,y)$	*8,16, I*$\Leftrightarrow$	

125. Les propositions sont :

a) $p \Rightarrow l$

b) $l \wedge p$

c) $l \vee \neg l$

d) $(p\Rightarrow l) \wedge (\neg p\Rightarrow\neg l)$ (ou $p \Leftrightarrow l$)

p	l	¬p	¬l	p ⇒ l	l ∧ p	l ∨ ¬l	¬p ⇒ ¬l	(p⇒l) ∧ (¬p⇒¬l)
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V	V

On voit que $l \wedge p \models (p\Rightarrow l) \wedge (\neg p\Rightarrow\neg l)$; $l \wedge p \models p \Rightarrow l$; $l \wedge p \models l \vee \neg l$

$(p\Rightarrow l) \wedge (\neg p\Rightarrow\neg l) \models p \Rightarrow l$; $(p\Rightarrow l) \wedge (\neg p\Rightarrow\neg l) \models l \vee \neg l$

$p \Rightarrow l \models l \vee \neg l$

Donc $l \vee \neg l$ est plus probable que $p \Rightarrow l$, qui est plus probable que $(p\Rightarrow l) \wedge (\neg p\Rightarrow\neg l)$, qui est plus probable que $l \wedge p$

126. $[(p \Leftrightarrow l) \wedge (p \Rightarrow i)] \Rightarrow (i \Rightarrow l)$

p	l	i	p⇔l	p⇒i	(p⇔l) ∧ (p⇒i)	i ⇒ l	Formule
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V

Raisonnement non valide

127.

$\neg\{[(p \Leftrightarrow l) \wedge (p \Rightarrow i)] \Rightarrow (i \Rightarrow l)\}$

↓

$(p \Leftrightarrow l) \wedge (p \Rightarrow i), \neg(i \Rightarrow l)$

↓

$p \Leftrightarrow l, p \Rightarrow i, \neg(i \Rightarrow l)$

↓

$p \Leftrightarrow l, p \Rightarrow i, i, \neg l$

↙ ↘

$p, l, p \Rightarrow i, i, \neg l$ — $\neg p, \neg l, p \Rightarrow i, i, \neg l$

X

↓

$\neg p, \neg l, p \Rightarrow i, i$

↙ ↘

$\neg p, \neg l, \neg p, i$ — $\neg p, \neg l, i, i$

O — O

Raisonnement non valide ; on retrouve d'ailleurs l'interprétation qui rendait fausse la formule du raisonnement dans les tables de vérité.

128. $[(p \Leftrightarrow l) \wedge (p \Rightarrow i)] \Rightarrow (i \Rightarrow l)$

$\leftrightarrow\ [(p \Rightarrow l) \wedge (l \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow i)] \Rightarrow (i \Rightarrow l)$

$\leftrightarrow\ \neg[(p \Rightarrow l) \wedge (l \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow i)] \vee (i \Rightarrow l)$

$\leftrightarrow\ [\neg(p \Rightarrow l) \vee \neg(l \Rightarrow p) \vee \neg(p \Rightarrow i)] \vee (\neg i \vee l)$

$\leftrightarrow\ [(p \wedge \neg l) \vee (l \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg i)] \vee (\neg i \vee l)$

$\leftrightarrow\ (p \wedge \neg l) \vee (l \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg i) \vee \neg i \vee l$ FND

$\leftrightarrow\ (p{\wedge}\neg l{\wedge}i) \vee (p{\wedge}\neg l{\wedge}\neg i) \vee (l{\wedge}\neg p{\wedge}i) \vee (l{\wedge}\neg p{\wedge}\neg i) \vee (p{\wedge}\neg i{\wedge}l) \vee (p{\wedge}\neg i{\wedge}\neg l) \vee (\neg i{\wedge}p) \vee (\neg i{\wedge}\neg p) \vee (l{\wedge}p) \vee (l{\wedge}\neg p)$

$\leftrightarrow\ (p{\wedge}\neg l{\wedge}i) \vee (p{\wedge}\neg l{\wedge}\neg i) \vee (l{\wedge}\neg p{\wedge}i) \vee (l{\wedge}\neg p{\wedge}\neg i) \vee (p{\wedge}\neg i{\wedge}l) \vee (p{\wedge}\neg i{\wedge}\neg l) \vee (\neg i{\wedge}p{\wedge}l) \vee (\neg i{\wedge}p{\wedge}\neg l) \vee (\neg i{\wedge}\neg p{\wedge}l) \vee (\neg i{\wedge}\neg p{\wedge}\neg l) \vee (l{\wedge}p{\wedge}i) \vee (l{\wedge}p{\wedge}\neg i) \vee (l{\wedge}\neg p{\wedge}i) \vee (l{\wedge}\neg p{\wedge}\neg i)$

$\leftrightarrow\ (p{\wedge}\neg l{\wedge}i) \vee (p{\wedge}\neg l{\wedge}\neg i) \vee (l{\wedge}\neg p{\wedge}i) \vee (l{\wedge}\neg p{\wedge}\neg i) \vee (p{\wedge}\neg i{\wedge}l) \vee (\neg i{\wedge}\neg p{\wedge}\neg l) \vee (l{\wedge}p{\wedge}i)$

Il n'y a que sept termes. Manque le terme $\neg p{\wedge}\neg l{\wedge}i$. Le raisonnement n'est pas valide.

129. À partir des prémisses, je ne peux pas démontrer que « Frege ne m'intéresse que s'il est logicien ». On pourrait chercher à démontrer que $i \Rightarrow l$ en ajoutant *i* comme hypothèse supplémentaire et en essayant d'en déduire *l*, mais cette tentative est vouée à l'échec : de *i*, je ne puis rien déduire à partir de $p \Rightarrow i$. En revanche, je puis démontrer que « Frege m'intéresse s'il est logicien » :

(1)	$p \Leftrightarrow l$	*Pr.*
(2)	$p \Rightarrow i$	*Pr.*
(3)	│ l	*Hyp.*
(4)	│ p	*1, 3, E⇔*
(5)	│ i	*2, 4, E⇒*
(6)	$l \Rightarrow i$	*3, 5, Déch. 3, I⇒*

130. « Il faut être logicien pour être philosophe » est équivalent à « Tous les philosophes sont logiciens ».

sa contradictoire est d)

sa subalterne est a)

sa contraire est b)

son obverse est c)

131.

Il faut être logicien pour être philosophe

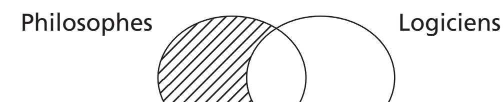
Personne n'est philosophe et non logicien — Contraires — **Nul philosophe n'est logicien**

Subalternes — Contradictoires — Subalternes

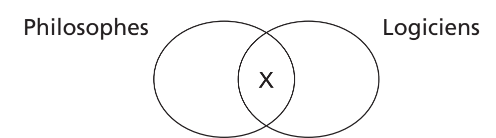
Beaucoup de logiciens sont philosophes — Subcontraires — **Il est des philosophes qui ne sont pas logiciens**

132. a) Il faut être logicien pour être philosophe

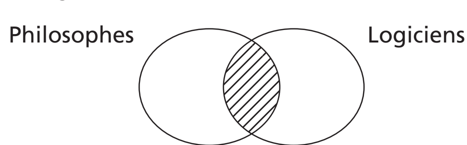
Personne n'est philosophe sans être logicien



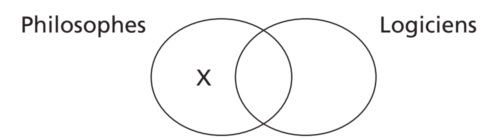
b) Beaucoup de philosophes sont logiciens



c) Nul philosophe n'est logicien



d) Il est des philosophes qui ne sont pas logiciens



133. En notant

p(x) : x est philosophe

l(x) : x est logicien

a) Il faut être logicien pour être philosophe
   $\forall$x (p(x) $\Rightarrow$ l(x))
b) Beaucoup de philosophes sont logiciens
   $\exists$x (p(x)$\wedge$l(x))
c) Nul philosophe n'est logicien
   $\neg\exists$x (p(x)$\wedge$l(x)) *ou* $\forall$x (p(x)$\Rightarrow\neg$l(x))
d) Personne n'est philosophe et non logicien
   $\neg\exists$x (p(x)$\wedge\neg$l(x))
e) Il est des philosophes qui ne sont pas logiciens
   $\exists$x (p(x)$\wedge\neg$l(x))

134. Il s'agit de démontrer que $\forall$x (p(x) $\Rightarrow$ l(x)) $\leftrightarrow$ $\neg\exists$x (p(x)$\wedge\neg$l(x))

$\forall$x (p(x) $\Rightarrow$ l(x))

$\leftrightarrow$ $\neg\neg\forall$x (p(x) $\Rightarrow$ l(x)) Prop.

$\leftrightarrow$ $\neg\exists$x $\neg$ (p(x) $\Rightarrow$ l(x)) Préd.

$\leftrightarrow$ $\neg\exists$x (p(x)$\wedge\neg$l(x)) Prop.

135. Le moyen terme « étendu dans l'espace » est attribut dans la majeure, sujet dans la mineure. Il s'agit donc d'un syllogisme de la 4e figure.

Les propositions sont du type AEE.

Il s'agit donc d'un syllogisme en *Camenes*

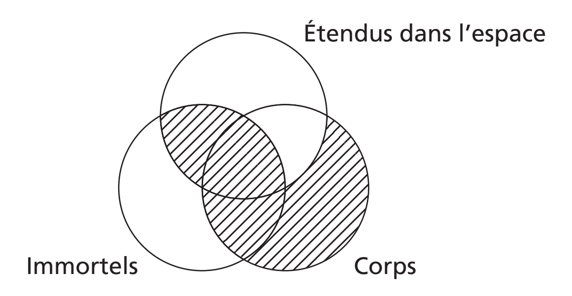
136. Pour ramener un syllogisme en *Camenes* à un syllogisme de la première figure (en *Celarent*), il faut permuter ses prémisses (m) et opérer une conversion simple (s) sur sa conclusion. On obtient ainsi un syllogisme en *Celarent* :

Rien de ce qui est étendu dans l'espace n'est immortel.

Tous les corps sont étendus dans l'espace.

Donc aucun corps n'est immortel.

137.



138. On note

c(x) : x est un corps

e(x) : x est étendu dans l'espace

i(x) : x est immortel

Le raisonnement s'écrit :

Prémisses $\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x))$

$\neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x))$

Conclusion $\neg\exists x\,(i(x) \wedge c(x))$

Il correspond à la proposition $[\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)) \wedge \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x))] \Rightarrow \neg\exists x\,(i(x) \wedge c(x))$ dont on étudie la validité en recherchant des modèles de $\neg\{[\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)) \wedge \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x))] \Rightarrow \neg\exists x\,(i(x) \wedge c(x))\}$

$$\neg\{[\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)) \wedge \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x))] \Rightarrow \neg\exists x\,(i(x) \wedge c(x))\}$$

$$\downarrow$$

$$[\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)) \wedge \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),\ \exists x\,(i(x) \wedge c(x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)),\ \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),\ \exists x\,(i(x) \wedge c(x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)),\ \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),\ i(a) \wedge c(a)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)),\ \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),\ i(a),\ c(a)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)),\ \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),\ i(a),\ c(a),\ c(a) \Rightarrow e(a)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)),\ \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),\ i(a),\ c(a),\ c(a) \Rightarrow e(a),\ \neg(e(a) \wedge i(a))$$

$\swarrow$ $\searrow$

$\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)),\ \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),$ $i(a),\ c(a),\ \neg c(a),\ \neg(e(a) \wedge i(a))$

X

$\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)),\ \neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),$ $i(a),\ c(a),\ e(a),\ \neg(e(a) \wedge i(a))$

$\swarrow$ $\searrow$

$\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)),$ $\neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),$ $i(a),\ c(a),\ e(a),\ \neg e(a)$

X

$\forall x\,(c(x) \Rightarrow e(x)),$ $\neg\exists x\,(e(x) \wedge i(x)),$ $i(a),\ c(a),\ e(a),\ \neg i(a)$

X

Le syllogisme est bien valide.

139. Il s’agit de démontrer la validité du raisonnement suivant :

Prémisses	$\forall x\ (c(x)\Rightarrow e(x))$
	$\neg\exists x\ (e(x)\wedge i(x))$
Conclusion	$\neg\exists x\ (i(x)\wedge c(x))$

1.	$\forall x\ (c(x)\Rightarrow e(x))$		*Pr.*	
2.	$\neg\exists x\ (e(x)\wedge i(x))$		*Pr.*	
3.		$\exists x\ (i(x)\wedge c(x))$	*Hyp.*	
4.		$i(a)\wedge c(a)$	*3, E∃*	a
5.		$c(a)$	*4, E∧*	
6.		$c(a)\Rightarrow e(a)$	*1, E∀*	
7.		$e(a)$	*5,6, E⇒*	
8.		$i(a)$	*4, E∧*	
9.		$e(a)\wedge i(a)$	*7,8, I∧*	
10.		$\exists x(e(x)\wedge i(x))$	*9, I∃*	
11.	$\neg\exists x\ (i(x)\wedge c(x))$		*2,10, Déch.3,I¬*	

À noter que, en posant $\exists x\ (i(x)\wedge c(x))$ à la ligne 3 et en tirant de cette hypothèse et de la prémisse 1 la conclusion 10, qui est la négation de la prémisse 2, cette déduction naturelle consiste en fait en un raisonnement par l’absurde, qui montre le lien de *Celarent* à *Darii*.



Exercices sur l'argumentation

I. 1) **3** ; 2) **2** ; 3) **4** ; 4) **5** ; 5) **6** ; 6) **1**

II.

1) 67	16) 25	31) 39	46) 29	61) 10 (et 11)
2) 27	17) 8	32) 9	47) 13	62) 17
3) 53	18) 55	33) 49	48) 46	63) 6
4) 21	19) 16	34) 11	49) 75	64) 67
5) 43	20) 19	35) 63	50) 14	65) 58
6) 17	21) 51	36) 59 (et 46)	51) 38	66) 33
7) 43	22) 60	37) 2	52) 34	67) 30
8) 10	23) 1	38) 58	53) 74	68) 57
9) 26	24) 62	39) 24	54) 18	69) 32
10) 12	25) 23	40) 52	55) 61	70) 44
11) 22	26) 41	41) 76	56) 37	71) 35
12) 63	27) 66	42) 6	57) 73	72) 50
13) 7	28) 71	43) 20	58) 25	73) 28
14) 15	29) 4	44) 56 (et 71)	59) 73 (et 72)	74) 36
15) 77	30) 68	45) 19	60) 62	75) 31

III.

2) k	28) c	38) e
5) a	31) j	43) f
11) i et p	32) d	49) o
13) b (et éventuellement d)	33) n	54) g
15) m	36) l	73) h

IV. 3) Le gouvernement est-il seul à défendre la modération salariale ou est-il rejoint en cela par d'autres sources éventuellement plus fiables ?

Le gouvernement peut-il faire valoir de bonnes raisons de défendre la modération salariale ? Sont-elles vérifiables par d'autres ?

Les critiques ici adressées au gouvernement sont-elles de nature à mettre en doute sa fiabilité dans ce cas précis ?

Que la modération salariale soit souhaitable, est-ce, par ailleurs, globalement plausible (compatible avec notre système de connaissances) ?

4) Les événements de la série (lancers de la boule dans la roulette) sont-ils indépendants les uns des autres ?

10) Le nouveau cas (situation au Congo) est-il bien similaire à l'ancien cas (situation au Rwanda) sur tous les aspects significatifs pour ce qui est d'une intervention militaire belge ? A-t-on de bonnes raisons de penser qu'il n'y a pas, entre les cas, des différences significatives à cet égard ?

A-t-on vérifié si le nouveau cas n'est pas également similaire à d'autres cas qui ne se sont pas soldés par un échec ?

17) Les voitures observées étaient-elles typiques ? A-t-on de bonnes raisons de penser que les observations n'ont pas été faites dans des circonstances particulières (ex. spécificité socio-économique d'un quartier) qui rendraient problématique la généralisation ?

18) Au-delà d'un manque d'arguments qui étayeraient la malhonnêteté du sénateur, y a-t-il de bonnes raisons d'affirmer qu'il est incorruptible ?

25) A-t-on pu écarter la possibilité qu'il existe d'autres phénomènes (comme un accroissement global de la population) qui accompagnent systématiquement A et B, et qui pourraient constituer leur cause commune ?

26) S'agit-il bien de légitimer une action et non d'établir la vérité d'une thèse ?

34) Y a-t-il de bonnes raisons de penser que la tendance doit être uniforme/continue ?

45) Le tout et les parties sont-ils du même ordre (et susceptible des mêmes propriétés) ?

57) Les hypothèses qui sont distinguées et présentées comme branches (incompatibles) de l'alternatives sont-elles les seules envisageables ou d'autres possibilités encore peuvent-elles être envisagées ?

V.

1) **3**
2) **1**
3) **3**
4) **2**
5) **3**
6) **1**
7) **6 (Ad carotam)**
8) **3**
9) **2**
10) **6 (Dilemme-valide)**
11) **1**
12) **2**
13) **6 (Ad verecundiam)**
14) **2**
15) **1**
16) **2**
17) **3**
18) **1**
19) **1**
20) **4**
21) **3**
22) **6 (Chaudron)**
23) **4**
24) **2**
25) **1**
26) **3**
27) **1**
28) **1**
29) **2**
30) **1**
31) **2**
32) **3**
33) **1**
34) **2**
35) **3**
36) **1**
37) **2**
38) **1**
39) **2**
40) **2**
41) **6 (Attaque personnelle injurieuse)**
42) **2**
43) **2**
44) **1**
45) **2**
46) **1**
47) **4**
48) **3**
49) **3**
50) **1**
51) **2**
52) **1**
53) **2**
54) **3**
55) **3**
56) **1**
57) **1**
58) **2**
59) **6 (Ambiguïté lexicale)**
60) **2**
61) **1**
62) **2**
63) **1**
64) **2**
65) **1**
66) **3**
67) **1**
68) **1**

69) **3**
70) **3**
71) **2**
72) **6 (Ad consequentiam)**
73) **1**
74) **1**
75) **2**
76) **1**
77) **1**
78) **2**
79) **1**
80) **3**
81) **2**
82) **2**
83) **1**
84) **1**
85) **1**
86) **3**
87) **1**
88) **1**
89) **1**
90) **2**
91) **1**
92) **3**
93) **1**
94) **1**
95) **3**
96) **2**
97) **3**
98) **2**
99) **3**
100) **1**
101) **2**
102) **1**
103) **2**
104) **2**
105) **1**
106) **1**
107) **1**
108) **1**
109) **1**
110) **2**
111) **2**
112) **2**
113) **2**
114) **2**
115) **2**
116) **1**
117) **3**
118) **1**
119) **1**
120) **1**
121) **3**
122) **1**
123) **3**
124) **2**
125) **3**

VI.

Les deux raisonnements sont des *Ignoratio elenchi* ; ils « manquent leur cible », c'est-à-dire qu'ils démontrent autre chose que ce qu'ils prétendaient démontrer. Le premier fournit un argument en faveur de la thèse selon laquelle il faut une loi, mais il devait démontrer que la loi à adopter est celle de l'interdiction des OGM. Le second fournit divers arguments pour établir que la victime avait intérêt à ce que la victime décède, mais il devait démontrer qu'elle a commandité son assassinat.

VII.

1. Exemple de réponse :

Raisonnement : « Il est très explicitement interdit d'embarquer une arme à feu dans la cabine d'un avion de ligne.

Donc, même si ce n'est pas dit explicitement, cela vaut aussi pour un hélicoptère. »

Il s'agit ici d'un raisonnement d'analogie : une thèse – on ne peut pas embarquer une arme à feu dans un hélicoptère – est défendue au nom de la similarité du cas de l'hélicoptère avec celui de l'avion de ligne, pour lequel vaut explicitement la règle d'interdiction. Le raisonnement est dit *a pari* du fait que la règle ne valait pas explicitement pour le cas de l'hélicoptère

Commentaire sur la réponse attendue :

Il convenait ici de fournir 1) un raisonnement (et pas seulement une proposition complexe),

2) qui souligne les similarités entre deux situations et 3) qui prétend étend à l'une d'elles l'application d'une règle qui ne prévoyait explicitement que l'autre situation.

2. Exemple de réponse :

Raisonnement : « Monsieur, votre déclaration selon laquelle vous auriez vu votre locataire mettre involontairement le feu à l'appartement qu'il vous loue est nulle et non avenue.

Il est trop clair que vous avez tout intérêt à ce que votre locataire soit reconnu civilement responsable du sinistre, ce qui obligerait son assurance locative à vous dédommager. »

Il s'agit ici d'une attaque personnelle circonstancielle : une thèse – Monsieur X a vu son locataire mettre involontairement le feu à l'appartement qu'il lui loue – est combattue, non pas en elle-même et par des arguments qui montreraient qu'elle ne peut être vraie, mais à travers son défenseur (argument *ad hominem*), dont on décrédibilise les propos en insistant sur l'intérêt qu'il a à dire ce qu'il dit (*ad hominem* circonstanciel).

Commentaire sur la réponse attendue :

Il convenait ici de fournir 1) un raisonnement (et pas seulement une proposition complexe),

2) qui qui disqualifie la thèse en alléguant les intérêts de celui qui la soutient et 3) qui est sophistique en ce qu'il ne se contente pas de soulever une suspicion légitime mais conclut que ce que dit l'opposant est forcément faux.

3. Exemple de réponse :

Raisonnement : « Si papa apprend que j'ai fait le mur, il va me priver de sortie pendant 3 mois et je ne pourrai plus voir ma copine.

Donc, maman, t'as compris : je suis resté dans ma chambre toute la nuit. »

Il s'agit ici d'un argument par les conséquences : le fils fait valoir auprès de sa mère les conséquences négatives qu'aurait pour lui la divulgation de son escapade nocturne ; il implore à cet égard la pitié de sa mère. Mais il ne se borne pas à lui recommander une action ; il va jusqu'à prétendre que ses arguments impliquent la vérité de la thèse selon laquelle il est resté dans sa chambre toute la nuit. Il utilise donc dans un débat théorique un argument par les conséquences, qui ne serait légitime que dans un débat pratique.

Commentaire sur la réponse attendue :

Il convenait ici de fournir 1) un raisonnement (et pas seulement une proposition complexe),

2) qui met en avant des conséquences négatives qu'aurait pour soi-même ou pour un tiers l'affirmation d'une vérité et 3) qui en conclut que la thèse est fausse.

VIII. 1. Il s'agit là d'un raisonnement ad *ignorantiam*, voire d'un *ad hominem* injurieux ; du fait que la thèse de l'existence du monstre s'avère mal-fondée (parce que la source d'information n'est pas fiable), le raisonnement conclut à tort que cette thèse est forcément fausse.

Pour interroger l'inférence, il conviendrait de poser les questions critiques suivantes :

- Y a-t-il, par ailleurs, d'autres raisons de penser que le monstre existe ?

- Y a-t-il des raisons de penser que le monstre n'existe pas ?

- Y a-t-il une présomption en faveur de la non existence de Nessie ?

2. Il s’agit là d’un raisonnement à arguments convergents ; il fait intervenir, en faveur d’une même conclusion, deux lignes argumentatives distinctes, dont l’une est un argument par les valeurs (l’impôt actuel est injuste) et l’autre un argument par les conséquences (l’impôt actuel pourrait mener à une fuite des capitaux). Le fait que les deux arguments entrent en tension au point de s’affaiblir l’un l’autre (si c’est une question de justice, ce n’est pas une question d’intérêts) fait penser à un argument du chaudron. Néanmoins, il se peut que les différents arguments évoqués ne soient en fait pas destinés aux mêmes auditeurs et que, par conséquent, chacune des parties de l’auditoire soit bel et bien rationnellement convaincue par l’argument auquel elle attache une attention prioritaire.

On pourrait contre-argumenter en disant :

« Pourquoi multipliez-vous les arguments ? On dirait qu’aucun d’entre eux n’est vraiment convaincant et que vous cherchez à tout prix à fonder une thèse à laquelle vous aviez déjà décidé d’adhérer sans autre raison que vos propres intérêts. »